
Note de synthèse sur les travaux de Jean MOULIN OLLAGNIER,
candidat à l'habilitation à diriger des recherches.

Spécialité : Mathématiques.

Avril 1986.

Soutenance du 2 décembre 1986 à l'Université Paris-Nord

En 1972, Jean-Pierre Conze donnait un cours de troisième cycle à l'université Paris VI intitulé "Entropie des systèmes dynamiques en théorie ergodique", offrant ainsi au jeune étudiant que j'étais une solide introduction à l'un des domaines les plus actifs de la recherche mathématique.

Dans ce titre se trouvent plusieurs des mots-clés relatifs à l'ensemble des travaux que j'ai réalisés en collaboration avec Didier Pinchon, puis seul, et que je présente ici.

Il s'agit en effet de théorie ergodique des systèmes dynamiques, c'est-à-dire de l'étude de diverses questions concernant le comportement asymptotique de grandeurs moyennes définies sur un ensemble muni d'une structure topologique ou mesurable et d'un groupe de transformations préservant cette structure.

Il s'agit en particulier d'entropie, de pression, d'énergie ; tous ces objets mathématiques ont été d'abord définis pour des modèles de mécanique statistique ; cet aspect de la thermodynamique m'a fourni, non seulement une source de problèmes, mais aussi de nombreux exemples.

Le plan de cette note sera essentiellement chronologique ; toutefois, cette présentation est pour moi l'occasion d'insister sur les aspects méthodologiques de mon travail et les subdivisions de l'exposé ne correspondront pas nécessairement chacune à une publication.

Avant de commencer, je voudrais remercier toutes celles et tous ceux qui m'ont permis de mener à bien ces travaux,

Jean-Pierre Conze pour m'avoir fait découvrir la théorie ergodique,

David Ruelle pour m'avoir fait apprécier la mécanique statistique rigoureuse,

Didier Pinchon pour sa collaboration de plusieurs années,

Jacques Neveu pour avoir dirigé ma thèse d'état,

Antoine Brunel qui m'a donné plusieurs fois l'occasion d'exposer au séminaire de théorie ergodique de Paris VI,

et de manière générale, les organisateurs et les participants des congrès et séminaires auxquels j'ai assisté,

en particulier Jean-Paul Thouvenot et François Ledrappier.

Qu'il me soit permis de remercier également Joseph Mellac qui m'a fait confiance pour être son directeur de thèse,
les éditions Springer qui ont fait paraître mon livre "Ergodic theory and statistical mechanics" dans leurs Lecture Notes, me permettant ainsi de diffuser plus largement mes travaux,
et Tony Frank Paschall qui a rendu lisible ma rédaction anglaise de ce livre.

MECANIQUE STATISTIQUE SUR UN RESEAU

Pour étudier mathématiquement, lorsque le volume d'un système physique grandit, certains problèmes de mécanique statistique de nature discrète comme le ferromagnétisme, on modélise la situation de la façon suivante.

L'ensemble S des sites est supposé dénombrable ; il est habituellement muni d'une structure géométrique de réseau.

En chaque site, les états possibles constituent un ensemble fini I de telle sorte que l'espace X des configurations est l'ensemble produit I^S .

Pour le ferromagnétisme proprement dit, I est réduit à deux éléments que l'on note $+1$ et -1 qui correspondent aux deux états de spin de l'électron célibataire de la couche externe de l'atome placé au site ; d'autre part, les problèmes mathématiques apparaissent dès que I a deux éléments et ce cas est donc intéressant.

Une autre vision du même modèle I^S avec un ensemble à deux éléments est appelée "gaz sur un réseau" et consiste à imaginer que les divers sites du réseau S sont occupés ou non par une particule.

Dans ce cas, on préfère noter 0 et 1 les éléments de I .

Il peut être utile d'avoir les deux intuitions à la fois. On désigne alors par σ_x la fonction coordonnée au site x lorsqu'elle prend ses valeurs dans $\{-1, +1\}$ et par η_x celle qui prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$.

En identifiant de manière arbitraire, on relie ces fonctions par la relation

$$\sigma_x = 2\eta_x - 1.$$

L'hypothèse statistique conduit à s'intéresser à certaines mesures de probabilité sur l'espace des configurations.

L'ensemble canonique de Gibbs est un espace probabilisé fini d'états possibles d'un système physique, où la température et le nombre de particules sont fixés. Chaque configuration a une probabilité proportionnelle à $\exp(-\beta H)$ (H est son énergie et β le facteur de Boltzmann). Le passage à la limite conduit à la définition des mesures de Gibbs canoniques pour un potentiel canonique donné.

Dans l'ensemble grand canonique, on permet au nombre de particules de fluctuer en pondérant les configurations par $\exp(-\beta H - \mu N)$, où N est le nombre de particules et μ le potentiel chimique. Le passage à la limite conduit ici à la définition des mesures de Gibbs pour un potentiel régulier.

Le problème de physique statistique de l'équivalence des grands ensembles consiste à savoir si les grandeurs thermodynamiques dépendent du type de statistique choisie.

La modélisation adoptée fournit une réponse à ce problème qui se traduit par le théorème suivant.

Théorème. Les mesures de Gibbs canoniques extrémales pour un potentiel $\overline{V}$ sont les mesures de Gibbs extrémales pour tous les potentiels $V + \mu V_0$, où μ appartient à $\overline{\mathbb{R}}$.

Notre intervention sur ce sujet a eu une origine double, la lecture de la version préliminaire de livre de J. B. Preston intitulé "Gibbs states on countable sets" dans le cadre du séminaire de théorie ergodique de Paris VI d'une part, et d'autre part la participation au séminaire sur les processus markoviens à une infinité de particules, qui se tenait à l'Ecole Polytechnique.

Preston a mis en avant la notion de potentiel régulier ou continu comme condition suffisante pour l'existence de mesures de Gibbs à la place de l'appartenance de l'interaction à un espace de Banach ad hoc qui était le cadre usuel de la mécanique statistique rigoureuse.

Reprenant cette bonne idée, nous avons remarqué que l'on pouvait définir les mesures de Gibbs comme des probabilités quasi-invariantes pour l'action du groupe G des modifications finies avec un module de quasi-invariance donné.

Précisément, on désigne par τ_x l'homéomorphisme de $\{-1, +1\}^S$ obtenu en renversant la coordonnée au site x . Le groupe G engendré par les τ_x quand x décrit S , est isomorphe à celui des parties finies de S muni de la différence symétrique ; on l'appelle groupe des modifications finies.

On appelle alors cocycle continu une application V de G dans l'espace $C(X)$ des fonctions réelles continues sur X vérifiant, pour tout couple de parties finies de G , l'identité :

$$V_{A\Delta B} = V_A + V_B \circ \tau_A$$

où τ_A désigne l'image de l'élément de G correspondant au produit des τ_x pour tous les x de la partie finie A .

Bien entendu, un tel cocycle est entièrement déterminé par la donnée de sa valeur sur l'ensemble des générateurs de G , les retournements τ_x , et ces fonctions V_x satisfont des relations correspondant aux relations entre les générateurs :

$$\begin{aligned} V_x + V_x \circ \tau_x &= 0 \\ V_x + V_y \circ \tau_x &= V_y + V_x \circ \tau_y \end{aligned}$$

car les générateurs sont involutifs et commutent entre eux.

Une mesure quasi-invariante pour le cocycle V est une probabilité borélienne sur X vérifiant, pour toute fonction continue f sur X et tout élément A de G , l'identité

$$\mu(f \circ \tau_A) = \mu(f \cdot \exp(V_A)).$$

Il suffit de vérifier ces relations pour les générateurs du groupe.

De manière semblable, les mesures de Gibbs canoniques peuvent être définies comme mesures quasi-invariantes pour l'action du groupe $\overline{G}$ des permutations finies. Ce groupe est engendré par les transpositions $\tau_{x,y}$ pour toutes les paires de sites distincts.

L'homéomorphisme $\tau_{x,y}$ consiste à permuter les coordonnées aux deux points x et y ; cette transposition consiste à faire le produit des retournements en x et y si les coordonnées sont différentes et à ne rien faire sinon.

Le groupe $\overline{G}$ est ainsi un sous-groupe du groupe plein de G . La quasi-invariance étant une propriété locale, il est alors naturel de déduire d'un G -cocycle V un $\overline{G}$ -cocycle $\overline{V}$.

Cette application n'est pas injective et son noyau est de dimension 1 ; il est engendré par le G -cocycle de comptage V_0 , défini par $(V_0)_x = \sigma_x$. Ainsi, toute mesure de Gibbs pour tout potentiel $V + \mu V_0$ est une mesure de Gibbs canonique pour le potentiel canonique $\bar{V}$.

Le contenu du théorème cité est alors double : si une probabilité est extrémale parmi les mesures de Gibbs canoniques pour $\bar{V}$, il existe une valeur du potentiel chimique μ telle qu'elle soit de Gibbs pour $V + \mu V_0$; elle est alors extrémale parmi les mesures de Gibbs pour ce potentiel.

Réciproquement, si une mesure de Gibbs pour $V + \mu V_0$ est extrémale, elle est encore extrémale parmi les mesures canoniques.

Avec les hypothèses restrictives usuelles, H. O. Georgii a montré ce résultat par des méthodes de mécanique statistique de l'équilibre.

Nous nous sommes débarrassés des restrictions inutiles et avons utilisé des méthodes de processus markoviens à une infinité de particules pour résoudre ce problème [1].

En particulier, les mesures de Gibbs canoniques pour un potentiel donné sont les probabilités stationnaires réversibles pour un processus de saut bien choisi, comme l'ont montré K. G. Logan et F. Ledrappier.

MESURES QUASI-INVARIANTES A DERIVEE CONTINUE

Nous venons de voir que les mesures de Gibbs peuvent être définies comme mesures quasi-invariantes à dérivée continue relativement à l'action du groupe G des modifications finies. Il n'est pas évident a priori que de telles mesures existent pour tout cocycle.

En fait, la structure particulière de G permet de démontrer qu'il y a toujours des mesures de Gibbs pour un potentiel continu donné ; G est en effet localement fini.

Cette remarque a été le point de départ d'une réflexion sur les mesures quasi-invariantes à dérivée continue pour l'action d'un groupe arbitraire d'homéomorphismes d'un espace compact.

Etant donné un espace compact X et un groupe G d'homéomorphismes de cet espace, on appelle cocycle une famille V de fonctions réelles continues sur X , indexée par les éléments du groupe et vérifiant les relations de compatibilité

$$V_{gh} = V_g + V_h \circ g^{-1}$$

pour tout couple d'éléments de G .

Un cocycle est une dérivée s'il existe une probabilité de Radon μ sur X telle que, pour tout élément g de G et toute fonction continue f sur X , on ait

$$\mu(f \circ g) = \mu(f \exp(V_g)).$$

On dit alors que la mesure μ est quasi-invariante de dérivée V .

Un cocycle est un cobord s'il existe une fonction continue f sur X telle que les éléments du cocycle soient les accroissements de f , c'est-à-dire soient définis par

$$V_g = f \circ g^{-1} - f.$$

L'espace vectoriel des cocycles étant muni de la topologie de la convergence simple de G dans $C(X)$, l'ensemble des dérivées est fermé par addition de limites de cobords.

De plus, si le groupe possède la propriété de point fixe, le cocycle nul est une dérivée et l'ensemble des dérivées contient alors au moins les limites de cobords.

On dit que l'action de G sur X est uniquement ergodique s'il existe une seule probabilité de Radon invariante sous cette action.

Dans le cas du groupe $\mathbb{Z}$, W. Krieger a montré que, pour une action uniquement ergodique, les dérivées sont les limites de cobords.

Nous avons d'abord étendu ce résultat au cas d'un groupe commutatif en établissant le théorème suivant.

Théorème. Soit V un cocycle continu pour l'action d'un groupe dénombrable abélien sur un compact X par homéomorphismes ; les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) V est la limite d'une suite spéciale de cobords
- ii) V est limite d'une suite de cobords
- iii) pour toute probabilité invariante μ sur X , l'homomorphisme $g \rightarrow \mu(V_g)$ est nul.

Nous définissons une suite spéciale à partir du cocycle V lui-même et d'une suite (B_n) de parties finies du groupe en posant

$$f_n = -|B_n|^{-1} \sum_{g \in B_n} V_g$$

Si on choisit une suite de Følner, le résultat est acquis.

Remarquons d'ailleurs qu'il n'y a pas besoin du résultat de Følner pour connaître l'existence de suites moyennantes de parties dans un groupe abélien dénombrable ; une telle suite peut être construite à partir de la structure explicite du groupe. La conclusion dans le cas uniquement ergodique est obtenue comme dans l'article de Krieger.

Dans notre note [2], nous donnons en plus de ce théorème pour les groupes abéliens, un contre-exemple avec un groupe résoluble.

La propriété de point fixe est donc loin d'être suffisante pour résoudre cette question et nous avons pu obtenir [3] une généralisation, en particulier aux groupes nilpotents, du résultat précédent.

Ici, le résultat de Følner sur l'existence de parties finies arbitrairement invariantes dans un groupe moyennable est non seulement inutile, mais aussi insuffisant puisqu'il nous faut construire un filtre plus fin adapté au cocycle, ce que nous faisons par récurrence sur la suite centrale ascendante du groupe nilpotent.

Nous avons d'autre part [4] donné une démonstration élémentaire, c'est-à-dire sans faire appel à l'utilisation de produits biaux, d'une version générale d'un résultat de G. Hedlund :

Si le groupe G agit sur un espace compact X de manière minimale (toute orbite est dense), un cocycle est un cobord si et seulement si il est uniformément borné.

PROCESSUS MARKOVIENS A UNE INFINITE DE PARTICULES

Les processus markoviens à une infinité de particules ne sont pas seulement des outils pour résoudre les problèmes de mécanique statistique de l'équilibre comme nous l'avons vu dans le cas de l'équivalence des grands ensembles. ce sont aussi des modèles qualitativement satisfaisants pour décrire l'évolution vers l'équilibre.

En particulier, les processus de spin-flip sont définis sur l'espace de configurations $X = \{-1, +1\}^S$, et l'état de chaque site se renverse de manière aléatoire avec une probabilité reliée à un potentiel continu donné.

Lorsque l'ensemble S est un réseau muni d'un groupe de translations pour lequel la situation est invariante, l'énergie libre décroît avec le temps dans ces processus ; c'est là une des manifestations de la recherche de l'équilibre.

Ce résultat a été obtenu pour la première fois par R. Holley sous certaines conditions restrictives ; Y. Higuchi et T. Shiga l'ont étendu.

Le point de départ est un opérateur Ω défini sur un sous-espace de $C(X)$, dense pour la norme uniforme, l'espace des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées :

$$\Omega f = \sum_{x \in S} c_x \cdot (f \circ \tau_x - f).$$

La fonction c_x est reliée au cocycle V par

$$c_x = d_x \cdot \exp\left(-\frac{\beta}{2} V_x\right).$$

La fonction continue d_x est strictement positive et invariante par le retournement τ_x .

L'évolution markovienne est traduite par un semi-groupe de contractions positives de $C(X)$, $t \rightarrow S(t)$, dont la fermeture de l'opérateur Ω est le générateur infinitésimal.

Cette construction n'est pas toujours possible, et T. M. Ligett, en particulier, a donné des conditions suffisantes pour que la fermeture de Ω soit le générateur d'un semi-groupe.

Les auteurs cités plus haut ont cherché à utiliser ces conditions. Notre point de vue a été différent ; nous avons supposé le problème de l'existence du semi-groupe résolu et nous nous sommes attachés à mettre en évidence des conditions naturelles pour montrer la décroissance de l'énergie libre.

Tout d'abord, il faut supposer que S est un réseau sous l'action d'un groupe B de bijections ; ce groupe est transitif et l'action est moyennable, c'est-à-dire que pour tout élément x_0 de S , pour toute partie finie F de S , pour tout réel positif ϵ , il existe une partie finie A de S telle que

$$|\{x \in A, \exists b \in B, b(x_0) = x \text{ et } b(F) \subset A\}| / |A| > 1 - \epsilon.$$

Une suite B -moyennante de partie finies (A_n) de S est une suite pour laquelle les rapports précédents tendent vers 1 pour tout élément x_0 de S et toute partie finie F de S .

De telles suites existent si l'action est moyennable ; ce sont des suites tendant vers l'infini au sens de Van Hove.

Il faut naturellement supposer le cocycle V invariant et la famille des fonctions d_x cohérente sous l'action de B par translation

$$\forall x \in S, \forall b \in B, V_{b(x)} = V_x \circ b^{-1} \text{ et } d_{b(x)} = d_x \circ b^{-1}.$$

Rappelons que X est un groupe compact ; ses caractères sont les fonctions σ_A , où σ_A est le produit des σ_x aux différents sites de la partie finie A .

La transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction réelle continue sur X est alors définie par

$$\hat{f}(A) = h(f \sigma_A)$$

où h est la mesure de Haar normalisée de X , qui n'est rien d'autre que la probabilité de Bernoulli, produit sur tous les sites de S de la probabilité de vecteur $(1/2, 1/2)$.

On peut montrer que toute fonction continue f est limite uniforme quand la partie finie A tend vers S , de la somme

$$\sum_{B \subset A} \hat{f}(B) \sigma_B.$$

D'autre part, on peut déduire des relations de cocycle l'existence, pour un potentiel continu V , d'une famille J de nombres réels, indexée par les parties finies de S , telle que

$$\hat{V}_x(A) = -2J(A) \text{ si } x \in A \text{ et } \hat{V}_x(A) = 0 \text{ sinon.}$$

On définit alors la fonction énergie dans la partie finie A par

$$U_A = \sum_{B \subset A} J(B) \cdot \sigma_B.$$

La notation $[B, A]$ désigne le cylindre des configurations de X dont la trace sur la partie finie A est B ; la fonction indicatrice de cet ouvert-fermé est

$$\prod_{x \in B} \eta_x \prod_{x \in A \setminus B} (1 - \eta_x).$$

L'entropie d'une probabilité μ dans A est le nombre

$$H(\mu, A) = \sum_{B \subset A} -\mu([B, A]) \log \mu([B, A]).$$

L'énergie libre par site dans A est le nombre $F(A, \mu)$ défini par

$$F(A, \mu) = |A|^{-1} (\mu(U_A) - \beta^{-1} H(\mu, A)).$$

Etant donnée une suite B -moyennante de parties finies de S , on définit l'énergie libre moyenne d'une mesure μ comme la limite supérieure quand n tend vers l'infini de $F(A_n, \mu)$ et on note $F(\mu)$ ce nombre.

Si μ est une probabilité invariante par translations, les expressions $|A_n|^{-1} \mu(U_{A_n})$ et $|A_n|^{-1} H(\mu, A_n)$ ont des limites quand n tend vers l'infini et ces limites ne dépendent pas de la suite moyennante choisie.

Le théorème principal de notre article [5] est alors le suivant.

Théorème. La fonction du temps, $t \rightarrow F(S(t)(\mu_0))$, où μ_0 est une mesure de probabilité fixée, est décroissante.

De plus, si la mesure μ_0 est invariante par translations, cette propriété est conservée par le semi-groupe, et l'énergie libre est strictement décroissante, à moins que la probabilité invariante ne soit une mesure de Gibbs pour le cocycle de départ.

Les mesures de Gibbs invariantes sont donc les seules mesures invariantes par translation qui soient stationnaires pour le processus markovien.

Notre innovation dans ce travail consista à utiliser précisément la moyennabilité, en particulier dans un lemme technique décisif, et d'autre part, à exprimer de manière significative la dérivée de l'énergie libre.

L'expression obtenue a été reprise par Holley et Stroock dans leur article "In one and two dimension every stationary measure for a stochastic Ising model is a Gibbs state".

SYSTEMES DYNAMIQUES DE LA MECANIQUE STATISTIQUE SUR UN RESEAU

La mécanique statistique sur un réseau fournit, en s'éloignant de l'intuition physique initiale, des exemples intéressants de systèmes dynamiques sur les espaces symboliques I^G , aussi bien topologiques que mesurés.

La quasi-invariance sous l'action du groupe des modifications finies est une notion très utile quand I n'a que deux éléments mais elle devient un peu artificielle pour les ensembles finis généraux ; nous avons d'ailleurs changé de point de vue entre la version préliminaire [8] du principe variationnel en mécanique statistique et la publication de ce résultat [14].

Il faut donc présenter la notion de spécification locale continue.

Précisons auparavant quelques notations.

La structure uniforme de l'espace compact X admet comme base d'entourages les V_A , $A \in \mathcal{F}(S)$, où V_A est le sous-ensemble de X^2 ainsi défini

$$V_A = \{(\xi_1, \xi_2) \in X^2, \forall x \in A, \xi_1(x) = \xi_2(x)\}.$$

On note alors $V_A(\xi)$ le voisinage d'ordre V_A de la configuration ξ .

Pour une partie finie A donnée, les $V_A(\xi)$ constituent une partition de X en ouverts-fermés ; les atomes de cette partition s'identifient aux éléments de I^A .

Si η est un élément de I^A , le cylindre $[\eta]$ est l'atome correspondant, c'est-à-dire l'ensemble des configurations dont la trace sur A est η .

On désigne d'autre part par $A(\xi)$ l'ensemble fini des configurations qui coïncident avec ξ en tous les points du complémentaire de A .

On appelle spécification locale une famille (π_A) indexée par l'ensemble des parties finies de G , de fonctions continues strictement positives sur X vérifiant, pour tout couple (A, A') de parties finies de G , où A' contient A , et tout élément ξ de X , la relation de cohérence

$$\pi_{A'}(\xi) = \pi_A(\xi) \sum_{\xi' \in A(\xi)} \pi_{A'}(\xi').$$

A partir d'une spécification locale $\pi = (\pi_A)$, on construit la famille d'opérateurs de $C(X)$, notée encore (π_A) de la façon suivante

$$\pi_A(f)(\xi) = \sum_{\xi' \in A(\xi)} \pi_{A'}(\xi') f(\xi').$$

Ces opérateurs sont des contractions positives de l'espace normé $C(X)$ et $\pi_\emptyset$ est l'identité. Ils vérifient de plus les relations de commutation

$$A \subset A' \Rightarrow \pi_A \circ \pi_{A'} = \pi_{A'} \circ \pi_A = \pi_{A'}.$$

En particulier, ce sont des projecteurs.

On appelle mesure de Gibbs relative à la spécification π une probabilité de Radon μ sur X vérifiant, pour toute partie finie A de S et tout élément f de $C(X)$, l'égalité

$$\mu(\pi_A(f)) = \mu(f).$$

Cela signifie que la spécification locale π fournit une version continue des probabilités conditionnelles de μ sachant la trace de la configuration en dehors d'une partie finie.

Des relations de commutation entre les opérateurs π_A , on peut déduire que l'ensemble $G(\pi)$ des mesures de Gibbs relatives à la spécification locale π n'est pas vide. C'est alors une partie convexe et compacte de l'ensemble des probabilités de Radon sur X et c'est même un simplexe.

Lorsque le réseau G est un groupe, il agit par translations à droite sur l'espace X

$$T^g(\xi)(a) = \xi(ag).$$

On s'intéresse alors aux spécifications locales invariantes, c'est-à-dire à celles qui vérifient $\pi_A \circ T^g = \pi_{Ag}$ pour tout élément g du groupe et toute partie finie A . Pour de telles spécifications, toutes les probabilités de Gibbs ne sont pas invariantes par translations ; mais l'action de G conserve le convexe compact des mesures de Gibbs de telle sorte qu'il y a des éléments invariants, lorsque G est moyennable.

On peut alors définir les notions d'énergie moyenne, d'entropie moyenne et de pression.

Etant donnée une partie finie A de G , $U(A, \xi)$ est la fonction qui représente l'énergie dans A

$$U(A, \xi) = \log \pi_A(\xi) - |A(\xi)|^{-1} \sum_{\eta \in A(\xi)} \log \pi_A(\eta).$$

Cette définition généralise celle que nous avons donnée précédemment à partir d'un cocycle.

Pour toute probabilité de Radon μ sur X , invariante sous l'action de G par translations, le rapport $\mu(U(A, .)) / |A|$ tend vers une limite notée $e(\mu)$ selon le filtre moyennant (nous définirons plus loin cet objet qui est une reformulation des suites de Følner).

Pour établir ce résultat, nous avons construit des fonctions continues e_x appelées énergies locales [6] telles que $e(\mu)$ soit égale à $\mu(e_x)$ pour tout site x et toute probabilité invariante.

L'entropie moyenne d'une probabilité invariante est la limite selon le filtre moyennant du rapport $H(\mu, A) / |A|$, où $H(\mu, A)$ est l'entropie dans la partie finie A , que nous avons définie plus haut.

L'existence de cette limite est due aux travaux de J. C. Kieffer et repose sur la propriété de forte sous-additivité de $H(\mu, A)$ comme fonction de A .

On appelle fonction de partition relative à la partie finie A le nombre $Z(A)$

$$Z(A) = \sum_{\eta \in I^A} \sup_{\xi \in [\eta]} \exp U(A, \xi).$$

Le rapport $Z(A) / |A|$ admet une limite selon le filtre moyennant que l'on appelle la pression.

Le principe variationnel en mécanique statistique est le résultat suivant.

Dans la situation que nous venons de décrire, la pression $p(\pi)$ est la borne supérieure sur l'ensemble des probabilités invariantes de la somme $e(\mu) + h(\mu)$.

On appelle mesures d'équilibre les probabilités pour lesquelles cette borne supérieure est atteinte ; les mesures d'équilibre sont exactement les mesures de Gibbs invariantes.

La première partie de ce résultat repose sur une bonne gestion des propriétés de moyennabilité inspirée de notre "lemme technique" [5] ; nous avons montré [6] que les mesures de Gibbs invariantes sont des mesures d'équilibre.

La réciproque a nécessité des outils nouveaux, notamment le gain d'information, introduit par H. Föllmer.

Nous avons pu conclure que les mesures dont le gain d'information moyen par rapport à la spécification est nul sont des mesures de Gibbs en les caractérisant par un principe variationnel local.

Un résultat original de théorie des groupe moyennables ([14], III, lemme 3) nous a alors permis de passer d'un résultat en moyenne à un résultat local. Nous nous sommes ainsi débarrassés des techniques de pavage utilisées par Föllmer et Preston.

Des modèles particuliers donnent lieu à des problèmes nouveaux, dont certains sont de nature combinatoire. Citons le célèbre modèle d'Ising sur le réseau $\mathbb{Z}^2$.

En dimension 1, les modèles de paire attractifs en $1/n^\alpha$ ont retenu l'attention des spécialistes.

Un théorème général de Ruelle, que je décris dans mon livre ([18], chap. 7), montre qu'il n'y a de transition de phase (existence de plusieurs mesures de Gibbs) à aucune température si le paramètre α est supérieur à 2.

En comparant avec des modèles hiérarchiques, F. J. Dyson a montré qu'il y avait toujours transition de phase à température assez basse lorsque le paramètre α est inférieur à 2.

Le cas limite, $\alpha = 2$, connu sous le nom de modèle d'Anderson, n'a été résolu que récemment par Frölich et Spencer ; J. Mellac a donné une borne explicite de la température critique dans la thèse de troisième cycle qu'il a préparée sous ma direction.

GROUPES PAVABLES ET PRINCIPE VARIATIONNEL

A partir des modèles de mécanique statistique sur un réseau $\mathbb{Z}^n$, D. Ruelle a introduit la notion de pression d'une fonction réelle continue pour une action du groupe $\mathbb{Z}^n$ sur un espace compact. Lorsque cette action vérifie les hypothèses de spécification et d'expansivité, il a démontré un principe variationnel.

P. Walters a généralisé la définition de la pression d'une fonction continue à un homéomorphisme quelconque d'un espace compact en partant de notions de topologie dynamique introduites par R. Bowen ; il a prouvé le principe variationnel correspondant.

Sa démonstration était assez indirecte puisqu'il approchait un système dynamique par des systèmes ayant des propriétés particulières.

M. Misiurewicz a donné une preuve simple et élégante du principe variationnel pour l'action du semi-groupe $\mathbb{Z}^{n+}$; il utilise de manière décisive dans sa démonstration la possibilité de paver $\mathbb{Z}^{n+}$ par des parallépipèdes.

La possibilité de trouver des parties finies d'un groupe moyennable, aussi invariantes que l'on veut et qui de plus soient des pavés, a permis d'autre part à D. Ornstein et B. Weiss de montrer le lemme de Rokhlin pour les groupes résolubles.

Notre travail sur ce sujet [9] est une étude sur les groupes pavables ; nous montrons que la classe des groupes pavables est stable pour les mêmes constructions que celle des groupes moyennables, ce qui conduit à conjecturer que tout groupe moyennable est pavable. Cette question n'est toujours pas résolue.

Nous en déduisons le principe variationnel pour les groupes pavables en adaptant la preuve de Misiurewicz.

Cette présentation étant faite, donnons quelques définitions précises.

Considérons un espace compact X et une action T d'un groupe moyennable G sur X par homéomorphismes.

On appelle W l'ensemble des entourages ouverts symétrique de l'unique structure uniforme sur X (c'est une base du filtre des entourages).

On dit qu'un sous-ensemble E de X est δ -séparé si deux éléments différents quelconques de E ne sont pas voisins d'ordre δ .

On dit qu'un recouvrement ouvert fini O est d'ordre δ si tout ouvert a de ce recouvrement vérifie $a \times a \subset \delta$. Il en existe puisque l'espace X est compact.

Une application qui associe à un point d'un ensemble δ -séparé E un ouvert d'un recouvrement O d'ordre δ auquel il appartient, est alors injective et un ensemble δ -séparé est donc nécessairement fini.

Soit f une fonction réelle sur X , bornée supérieurement.

Pour tout sous-ensemble fini E de X , on désigne par $Z(f, E)$ la somme

$$Z(f, E) = \sum_{x \in E} \exp(f(x)).$$

Pour tout recouvrement ouvert O de X , on désigne par $Z(f, O)$ la somme

$$Z(f, O) = \sum_{a \in O} \sup_{x \in a} \exp(f(x)).$$

A cause de l'injection précédente, on a $Z(f, E) \leq Z(f, O)$ si E est un sous-ensemble δ -séparé et O un recouvrement d'ordre δ .

La borne supérieure $P_1(f, \delta)$ des nombres $Z(f, E)$, où E est une partie δ -séparée de X est finie et la borne inférieure $P_2(f, \delta)$ des $Z(f, O)$, où O est un recouvrement ouvert fini d'ordre δ n'est pas nulle.

On a évidemment l'inégalité $P_1(f, \delta) \leq P_2(f, \delta)$.

Si A est une partie finie du groupe G et δ un élément de W , on désigne par δ_A l'élément suivant de W

$$\delta_A = \bigcap_{g \in A} (T^g \times T^g)^{-1}(\delta),$$

où $T \times T$ est l'action de G définie composante par composante sur le carré $X \times X$.

Si A est une partie finie du groupe G , on désigne par f_A la fonction réelle bornée supérieurement sur X

$$f_A = \sum_{g \in A} f \circ T^g.$$

On note $p_1(f, \delta)$ la limite supérieure selon le filtre moyennant du rapport

$$(1/|A|) \log(P_1(f_A, \delta_A)).$$

Si δ' est un entourage plus fin que δ , les ensembles δ -séparés sont δ' -séparés, et l'on en déduit l'inégalité

$$p_1(f, \delta) \leq p_1(f, \delta').$$

Ceci nous permet la définition de la fonction p_1 sur l'ensemble des fonctions réelles bornées supérieurement sur X

$$p_1(f) = \sup_{\delta \in W} p_1(f, \delta) = \lim_{\delta \in W} p_1(f, \delta),$$

où la limite est prise selon le filtre des entourages ouverts symétriques de X .

On définit de même le nombre $p_2(f, \delta)$ comme la limite supérieure selon le filtre moyennant du rapport

$$(1/|A|) \log(P_2(f_A, \delta_A)).$$

Là encore, si l'entourage ouvert δ' est plus fin que l'entourage ouvert δ , on a l'inégalité

$$p_2(f, \delta) \leq p_2(f, \delta')$$

et l'on définit la fonction p_2 par

$$p_2(f) = \sup_{\delta \in W} p_2(f, \delta) = \lim_{\delta \in W} p_2(f, \delta),$$

où la limite est prise selon le filtre des entourages ouverts symétriques.

Pour toute fonction réelle bornée supérieurement, ces deux nombres sont liés par l'inégalité $p_1(f) \leq p_2(f)$.

Les nombres $p_1(f)$ et $p_2(f)$ coïncident lorsque la fonction f est continue. On appelle pression de la fonction continue f la valeur commune de ces deux nombres.

Le principe variationnel est le résultat suivant

La pression $p(f)$ d'une fonction continue sur un espace compact X , sous l'action d'un groupe moyennable G d'homéomorphismes de X , est la borne supérieure sur l'ensemble de toutes les probabilités de Radon invariantes μ sur X de la somme $h(\mu) + \mu(f)$, où $h(\mu)$ désigne l'entropie du système dynamique mesuré construit à l'aide de la probabilité de Radon invariante μ .

La démonstration se compose de deux parties ; pour démontrer que $p(f)$ est un majorant des sommes $h(\mu) + \mu(f)$, il suffit que les pavés du groupe G soient de cardinal aussi grand que l'on veut.

Pour l'inégalité inverse, nous avons utilisé toute la définition d'un groupe pavable, l'existence de pavés aussi invariants que l'on veut.

Remarquons également que la première partie utilise la définition p_2 en termes de recouvrements ouverts tandis que la seconde utilise la définition p_1 donnée à partir des ensembles δ -séparés.

GROUPES MOYENNABLES ET FILTRE MOYENNANT

On dit qu'un groupe G possède la propriété de point fixe si toute action de ce groupe sur une partie convexe compacte non vide d'un espace vectoriel topologique localement convexe par des bijections affines continues laisse fixe au moins un point de ce convexe compact. Un groupe abélien possède la propriété de point fixe.

On appelle groupe moyennable un groupe possédant la propriété de point fixe. Plusieurs définitions équivalentes à celle-ci peuvent être données ; l'ouvrage de Greenleaf étudie ces questions, en particulier l'existence de moyennes invariantes.

Donnons une définition. Etant donnée une partie finie D de G , on note m_D la fonction sur l'ensemble $\mathcal{F}(G)$ des parties finies de G

$$m_D(A) = |\{x \in A, \exists d \in D, dx \notin A\}|.$$

Intuitivement, la partie A est d'autant plus invariante par les translations à gauche par les éléments de D que le rapport $m_D(A)/|A|$ est petit.

On dit qu'un groupe G possède un filtre moyennant si, pour toute partie finie D et tout ϵ positif, il existe des parties finies non vides A de G telles que le rapport $m_D(A)/|A|$ soit inférieur à ϵ . On note alors $M(D, \epsilon)$ l'ensemble non vide de ces parties finies.

Il est clair que, si D' contient D et si ϵ' est inférieur à ϵ , $M(D', \epsilon')$ est contenu dans $M(D, \epsilon)$. Les parties $M(D, \epsilon)$, où D décrit l'ensemble des parties finies de G et où ϵ est un réel positif constituent alors une base d'un filtre sur $\mathcal{F}(G)$, que l'on appelle le filtre moyennant et que l'on note $\mathcal{M}$.

Si le groupe G possède un filtre moyennant, il est moyennable.

La réciproque de ce résultat est également vraie : tout groupe moyennable possède un filtre moyennant.

C'est à E. Følner que l'on doit la première démonstration de ce théorème. Nous avons donné une démonstration nouvelle qui repose sur l'étude des capacités invariantes.

On appelle capacité invariante une application m de $\mathcal{F}(G)$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés suivantes

- i) $m(\emptyset) = 0$
- ii) pour tout couple (A, B) , $m(A \cup B) + m(A \cap B) \leq m(A) + m(B)$
(sous-additivité forte)
- iii) pour toute partie finie A et tout g de G , $m(A) = m(Ag)$
(invariance à droite)
- iv) il existe une constante positive K telle que l'accroissement $m(A \setminus a) - m(A)$ soit minoré uniformément en a et A par $-K$.

Le premier exemple de capacité invariante est fourni par la fonction cardinal, $A \rightarrow |A|$. Il en est de moins triviaux, par exemple les fonctions m_D qui servent à définir le filtre moyennant.

On appelle valeur moyenne d'une capacité invariante m la borne inférieure $q(m)$ sur l'ensemble de toutes les parties finies non vides du rapport $m(A)/|A|$. Cette borne inférieure est définie à cause de la propriété (iv) des capacités invariantes.

L'ensemble Σ des capacités invariantes constitue un cône convexe et l'application $m \rightarrow q(m)$ est clairement sur-additive, positivement homogène et croissante.

Démontrer l'existence d'un filtre moyennant revient à montrer que, pour toute partie finie D de G , la valeur moyenne $q(m_D)$ est nulle. Il est clair que l'on a la relation de sous-additivité

$$m_D \leq \sum_{d \in D} m_{\{d\}}.$$

Il suffit donc d'établir le résultat pour les parties D réduites à un point et de montrer la sous-additivité de la fonction q sur le cône Σ .

Le résultat principal est la sous-additivité de q que nous montrons dans notre note [11] en identifiant cette fonction avec une borne supérieure de formes linéaires. Pour cela, nous étudions le système dynamique des ordres totaux ; Kieffer a été le premier à utiliser les ordres totaux sur un groupe moyennable pour établir des théorèmes limites selon le filtre moyennant.

Dans la rédaction de mon cours ([18], chapitre 2), j'ai préféré mettre en avant la construction combinatoire basée sur le réarrangement d'une fonction positive ; c'est la méthode que nous avons dû employer pour résoudre le problème correspondant pour les groupes localement compacts moyennables [16].

Décrivons plus précisément cette propriété.

Etant donné une fonction positive à support fini sur le groupe G (la structure de groupe n'intervient pas ici), on distingue parmi les diverses décompositions de cette fonction f comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'indicatrices de parties finies son réarrangement qui est défini de la manière suivante.

Etant donnée la suite finie des diverses valeurs de f rangées par ordre croissant $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k$, la décomposition

$$f = \sum_{i=1}^{i=k} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \cdot \mathbf{1}_{(f \geq \alpha_i)}$$

est par définition son réarrangement.

Si m est une fonction fortement sous-additive sur $\mathcal{F}(G)$ et si f est une fonction positive à support fini sur G , la borne inférieure sur l'ensemble des décompositions de f en combinaisons linéaires à coefficients positifs d'indicatrices de parties finies, $f = \sum \lambda_A \mathbf{1}_A$ de la somme $\sum \lambda_A m(A)$ est atteinte pour le réarrangement de la fonction f .

Ceci permet le prolongement d'une capacité m , définie sur les parties finies, aux fonctions à support fini sur G .

L'application qui associe à toute fonction positive f à support fini sur G le réel $\sum (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \cdot m(f \geq \alpha_i)$ est en effet une fonction sous-linéaire sur le cône $C_K^+(G)$ des fonctions positives à support fini sur G ; elle prolonge la capacité invariante m définie sur les indicatrices.

L'application qui associe à une capacité invariante m le prolongement sous-linéaire invariant précédent est linéaire.

Le prolongement canonique d'une capacité invariante est additif lorsque les deux fonctions ont même tableau de variations, ce qui permet alors le prolongement de la fonction sous-linéaire invariante sur le cône $C_K^+(G)$ à l'espace vectoriel $C_K(G)$ des fonctions à support fini sur G en une fonction sous-linéaire invariante.

Le résultat de sous-additivité sur q est alors obtenu en identifiant $q(m)$ avec la borne supérieure sur l'ensemble de toutes les formes linéaires invariantes majorées par m de $\mu(\mathbf{1}_{\{e\}})$.

La sous-additivité d'une telle borne supérieure est à son tour le résultat d'une version invariante du théorème de Hahn-Banach, résultat caractéristique des groupes moyennables.

Décrivons maintenant le système dynamique des ordres totaux auquel nous avons fait allusion plus haut.

Etant donné un groupe G , on désigne par $Tot(G)$ (ou par Tot s'il n'y a aucune ambiguïté) l'ensemble des relations d'ordre total sur G .

Si t est un ordre total sur une partie finie F de G on note $O(F, t)$ l'ensemble des éléments de Tot dont la restriction à F est t .

L'ensemble des $O(F, t)$ constitue une base d'une topologie sur Tot , qui en fait un espace compact, métrisable si G est dénombrable.

Cette topologie n'est rien d'autre que la topologie induite sur Tot par la topologie produit sur $\{0, 1\}^{G \times G}$ (on identifie bien sûr un ordre à son graphe : $\tau(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leq y$ pour l'ordre τ).

A chaque élément de G , on associe l'application T^g de Tot dans lui-même définie par

$$T^g(\tau)(a, b) = \tau(ag, bg).$$

Les applications T^g sont des homéomorphismes, et l'on définit ainsi une action de G sur Tot .

Les ensembles $O(F, t)$ sont des ouverts-fermés, et l'on définit une forme linéaire positive sur l'espace vectoriel des fonctions qui ne dépendent que de la trace de l'ordre sur une partie finie en se donnant de manière cohérente les masses de tous les $O(F, t)$.

Il est possible de le faire en posant $\pi(O(F, t)) = 1/|F|!$.

L'espace vectoriel précédent est dense dans $C(Tot)$ pour la norme uniforme d'après le théorème de Stone-Weierstraß et la forme π se prolonge donc de manière unique en une probabilité de Radon sur Tot , que l'on note encore π .

Cette mesure est invariante sous l'action de G par les translations à droite (elle est même invariante sous l'action du groupe de tous les homéomorphismes induits par les bijections de G). On construit ainsi un système dynamique mesuré.

La première version [11] de notre démonstration utilisait le système dynamique topologique des ordres totaux et toutes les probabilités de Radon invariantes sur Tot .

La probabilité particulière π nous a servi à construire, en mécanique statistique, les énergies locales à partir du cocycle. Elle nous a également permis de démontrer le lemme combinatoire à l'aide duquel on achève la démonstration de la caractérisation des mesures d'équilibre.

FONCTIONS SOUS-ADDITIVES ET THEOREMES ERGODIQUES

Une fois défini le filtre moyennant d'un groupe moyennable, il est possible de retrouver, pour les actions de groupes moyennables, les théorèmes ergodiques en moyenne dans les espaces L^p .

Mais on peut déduire également bien d'autres résultats asymptotiques.

Le théorème ergodique de minimax est le prototype de cette catégorie de résultats :

Soit E un espace vectoriel réel muni d'une fonction sous-linéaire s et T une action à droite du groupe moyennable G sur E par des bijections linéaires conservant s .

Alors, pour tout élément f de E , on a le résultat suivant.

$$\begin{aligned} \sup_{\mu \in K(E, s, G)} \mu(f) &= \inf_{A \in \mathcal{F}(G) \setminus \emptyset} (1/|A|) s\left(\sum_{g \in A} f.T^g\right) \\ &= \limsup_{\mathcal{M}} (1/|A|) s\left(\sum_{g \in A} f.T^g\right) \end{aligned}$$

Puisque la limite supérieure selon le filtre moyennant est égale à la borne inférieure sur l'ensemble des parties finies non vides, cette limite supérieure est en fait une limite.

Dans le cas de l'espace $C(X)$ des fonctions réelles continues sur un espace compact X , la fonction sous-linéaire s est définie comme la borne supérieure de f sur X . Le groupe moyennable G agissant sur X par des homéomorphismes induit une action à droite sur $C(X)$ qui conserve s .

Alors, pour toute fonction continue f sur X , la borne supérieure des $\mu(f)$, où μ est une probabilité de Radon invariante sur X , est égale à $p(f)$, limite selon $\mathcal{M}$ des moyennes $(1/|A|).s(\sum_{g \in A} f \circ T^g)$.

Dans cette situation, on peut définir le nombre $p(f)$, non seulement pour les fonctions réelles continues, mais aussi pour les fonctions semi-continues supérieurement à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$.

Ce nombre $p(f)$, qui peut éventuellement être égal à $-\infty$, est encore la borne supérieure des $\mu(f)$, où μ est une probabilité de Radon invariante sur X . On peut obtenir ce résultat sur les fonctions s.c.s. à partir de celui sur les fonctions continues en utilisant le lemme de Dini.

Ainsi, la valeur moyenne $(1/|A|)s(f_A)$ converge selon le filtre moyennant et l'application $A \rightarrow s(f_A)$ n'est pas fortement sous-additive.

Cette remarque nous a conduit à définir des fonctions d'ensembles que nous avons appelées dans un premier temps complètement sous-additives, et que je préfère simplement appeler sous-additives, car ce sont exactement celles que l'on peut prolonger de manière sous-additive au cône des fonctions positives à support fini. Définissons-les.

On dit d'une fonction réelle c sur $\mathcal{F}(G)$ qu'elle est sous-additive si elle est nulle en $\emptyset$ et si, pour toute partie finie A et toute décomposition à coefficients positifs de l'indicatrice de A

$$\mathbb{1}_A = \sum \lambda_B \mathbb{1}_B,$$

on a l'inégalité $c(A) \leq \sum \lambda_B c(B)$.

Le théorème ergodique de minimax est encore valable pour les fonctions d'ensembles sous-additives :

Si c est une fonction sous-additive invariante sur l'ensemble $\mathcal{F}(G)$ des parties finies d'un groupe moyennable, il y a égalité entre la borne inférieure sur l'ensemble des parties finies non vides des moyennes $(1/|A|)c(A)$ et la limite supérieure selon le filtre moyennant des ces mêmes moyennes.

La démonstration de cette propriété repose sur l'utilisation de la décomposition à coefficients positifs de $\mathbb{1}_A$

$$\mathbb{1}_A = (1/|B|) \sum_{Bg \cap A \neq \emptyset} \mathbb{1}_{Bg \cap A}.$$

L'analogie continu de cette décomposition nous a permis [16] de retrouver la propriété (A) d'Emerson et Greenleaf pour les groupes localement compacts en évitant le lemme de recouvrement de Milnes et Bondar.

Dans ce même travail [16], nous résolvons une question d'Emerson ; il est possible de généraliser à des groupes non-unimodulaires ses résultats sur la limite des valeurs moyennes des fonctions fortement sous-additives invariantes ainsi que ceux de Kieffer sur le même sujet.

Poursuivant notre étude des fonctions sous-additives, nous avons mis en évidence le théorème ergodique du col :

Soit K une partie convexe compacte non vide d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, T une action à gauche d'un groupe moyennable G sur K par des bijections affines continues et f une application de $\mathcal{F}(G) \times K$ dans $\mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes.

- 1) pour tout point x de K , l'application partielle $f(., x)$ est sous-additive de $\mathcal{F}(G)$ dans $\mathbb{R}$,
- 2) pour toute partie finie A de G , l'application partielle $f(A, .)$ est concave et semi-continue supérieurement sur K ,
- 3) cette application est invariante au sens suivant : pour tout élément g du groupe G , toute partie finie A de G et tout point x de K , $f(Ag^{-1}, T^g(x)) = f(A, x)$.

Alors

$$\inf_{A \in \mathcal{F}(G) \setminus \emptyset} (1/|A|) \sup_{x \in K} f(A, x) = \sup_{x \in K_G} \inf_{A \in \mathcal{F}(G) \setminus \emptyset} (1/|A|) f(A, x),$$

où K_G désigne l'ensemble des points de K invariants sous l'action de G .

Ce théorème fournit la démonstration du principe variationnel de mécanique statistique et, avec quelques aménagements, la deuxième partie de la démonstration générale [15] où nous nous débarrassons du pavage.

Dans ce même article, nous modifions complètement dans la première partie la méthode d'approximation de Misiurewicz en introduisant la notion de taux de recouvrement, ce qui nous permet la démonstration définitive du principe variationnel pour la pression d'une fonction continue sous l'action d'un groupe moyennable d'homéomorphismes d'un espace compact.

Décrivons cette notion nouvelle

On dit qu'une partition finie α de X est adaptée au recouvrement ouvert δ s'il existe une application injective j de α dans δ telle que, pour tout K de α , K soit contenu dans l'ouvert $j(K)$.

On appelle taux de recouvrement du recouvrement ouvert δ par rapport à la mesure de probabilité μ la borne supérieure $R(\mu, \delta)$ des entropies conditionnelles $H(\mu, \alpha \mid \beta)$ d'une partition mesurable α adaptée au recouvrement par rapport à une autre partition mesurable adaptée au recouvrement.

Le taux de recouvrement est une fonction sous-additive du recouvrement, c'est-à-dire que le taux de recouvrement $R(\mu, \delta_1 \wedge \delta_2)$ du recouvrement dont les éléments sont les ouverts non vides $a_1 \cap a_2$, où a_1 appartient à δ_1 et a_2 à δ_2 , est inférieur à la somme des taux de recouvrement $R(\mu, \delta_1)$ et $R(\mu, \delta_2)$.

A propos de théorèmes ergodiques, le contre-exemple que je donne ([18], chapitre 3) met en évidence la différence de nature entre les hypothèses naturelles des théorèmes ergodiques en moyenne et celles des théorèmes ponctuels.

Par analogie avec le théorème ergodique de minimax, nous nous sommes intéressés au minimum de l'intégrale d'une fonction continue sur un produit de deux espaces compacts pour les probabilités ayant des marges données.

Nous généralisons ainsi une étude de V. Strassen et retrouvons l'expression de différentes distances sur l'espace des probabilités d'un espace donné.

Le théorème principal de notre note [10] s'étend aux espaces polonais et aux fonctions bornées semi-continues supérieurement.

THEOREME ERGODIQUE PRESQUE SOUS-ADDITIF CONVERGENCE EN MOYENNE DE L'INFORMATION

Etant donné un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et une partition mesurable finie P de cet espace, on appelle information relative à P et on note $I(P)$ la fonction mesurable positive

$$I(P) = \sum_{p \in P} -\log(\mu(p)) \mathbf{1}_p.$$

Cette fonction est intégrable et son intégrale est l'entropie $H(P)$ de la partition P .

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique où T est une action d'un groupe moyennable et infini G par des transformations bimesurables de X préservant la mesure μ .

Désignons par P^A la borne supérieure des partitions translatées de la partition finie P par les éléments de la partie finie A du groupe G .

Alors, l'information moyenne $(1/|A|)I(P^A)$ converge en norme L_1 selon le filtre moyennant.

La limite est un élément de $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$, invariant sous l'action de G ; de plus, c'est la borne inférieure des espérances conditionnelles $(1/|B|)E(I(P^B) | \mathcal{I})$ par rapport à la sous-tribu $\mathcal{I}$ des événements invariants.

Le résultat de convergence est le théorème de Shannon et McMillan ; ils l'ont démontré dans le cas du groupe $\mathbb{Z}$.

La démonstration générale pour l'action d'un groupe moyennable a été donnée pour la première fois par Kieffer. Il utilise pour cela la convergence presque sûre de l'information conditionnelle.

J'ai obtenu une démonstration nouvelle [17] plus simple en introduisant la notion de famille presque sous-additive d'éléments de L_1 et en établissant un théorème ergodique presque sous-additif.

Les théorèmes ergodiques sous-additifs ont été étudiés ces dernières années par M. Ackoglu, Y. Derriennic et U. Krengel.

La généralisation du théorème de Shannon et McMillan à d'autres groupes que $\mathbb{Z}$ a fait l'objet des travaux de J. Fritz, J.-P. Thouvenot, Y. Katznelson et B. Weiss, et Nguyen Xuan Xahn avant que Kieffer n'obtienne le résultat dans le cas des groupes moyennables.

Explicitons les objets introduits.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique. On dit qu'une famille (f_A) d'éléments de $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$, indexée par les parties finies du groupe G , est presque sous-additive s'il existe un réel C positif ou nul tel que, pour toute partie finie A de G et toute décomposition à coefficients positifs de l'indicatrice de A ,

$$\mathbf{1}_A = \sum_{B \in I} \lambda_B \mathbf{1}_B,$$

la différence $f_A - \sum_{B \in I} \lambda_B f_B$ soit presque négative, c'est-à-dire que la mesure

$$\mu((f_A - \sum_{B \in I} \lambda_B f_B)^+)$$

de sa partie positive soit inférieure à C .

On dit qu'une famille du type précédent est covariante si, pour toute partie finie A de G et tout élément g de G , on a $f(Ag) = f(A) \circ T^g$.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique et P une partition finie de l'espace. La famille d'éléments de $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ définie par $f_A = I(P^A)$ est presque sous-additive et l'on peut prendre la constante C égale à 1 [17]. Elle est aussi covariante puisque la mesure est invariante.

On peut alors conclure en lui appliquant le théorème presque sous-additif suivant :

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique où T est une action d'un groupe moyennable et infini. Soit (f_A) une famille presque sous-additive et covariante d'éléments de $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ indexée par les parties finies du groupe pour laquelle il existe une borne inférieure finie K pour les mesures $(1/|B|)\mu(f_B)$.

Alors, la moyenne $(1/|A|)f_A$ converge en norme selon le filtre moyennant ; la limite f est une fonction invariante sous l'action du groupe G et c'est la borne inférieure des espérances conditionnelles $(1/|A|)E(f_A | \mathcal{I})$ par rapport à la sous-tribu $\mathcal{I}$ des invariants.

EQUIVALENCE DES GROUPES MOYENNABLES DENOMBRABLES

La suite des segments de $\mathbb{Z}$, $(A_n = [0, \dots, n])$, est le prototype des suites de Følner pour les groupes moyennables dénombrables.

Mais les éléments de cette suite, les segments A_n , ont une propriété intéressante, à laquelle nous avons déjà fait allusion : ce sont des pavés.

On appelle pavé une partie finie d'un groupe dont certaines translatées à droite disjointes recouvrent le groupe ; la notion de pavé est donc relative aux classes d'équivalence de parties finies par translation à droite, que l'on peut appeler des formes.

Divers auteurs, Ornstein et Weiss en particulier, ont cherché à utiliser dans des groupes moyennables plus généraux que $\mathbb{Z}$ des suites de Følner constituées de pavés.

On peut en particulier en construire pour tous les groupes moyennables connus, comme nous l'avons dit plus haut [9].

Mais aucun théorème de structure des groupes moyennables n'est actuellement établi.

A. Connes, D. Ornstein et B. Weiss ont introduit la notion de presque-pavage : avec un nombre fini de formes différentes, arbitrairement moyennantes, on peut recouvrir la plus grande partie du groupe avec des translatées presque disjointes de ces formes.

Cette propriété est vraie pour tous les groupes moyennables. Elle résulte de l'équivalence des groupes moyennables dénombrables ([18], chapitre 8).

L'équivalence d'un groupe dénombrable avec $\mathbb{Z}$ est équivalente à l'existence d'une probabilité sur un sous-espace de $Tot(G)$. Nous avons remarqué lors d'une communication au congrès de théorie ergodique d'Oberwolfach [13] que l'on pouvait en déduire l'existence du filtre moyennant.

La question de l'équivalence d'un groupe moyennable dénombrable avec $\mathbb{Z}$ était donc posée. Il est possible de la résoudre par des méthodes de pavage au sens étendu de Connes, Ornstein et Weiss.

Précisons la situation.

On note T_0 l'ensemble des ordres totaux sur G isomorphes à l'ordre naturel de $\mathbb{Z}$. C'est un sous-ensemble borélien de l'ensemble Tot des ordres totaux, invariant sous l'action de G par translations.

Si G est dénombrable, cet ensemble n'est pas vide ; nous supposons donc désormais que G est dénombrable.

Nous cherchons à savoir s'il existe parmi les probabilités de Radon sur Tot invariantes sous l'action de G une probabilité μ telle que $\mu(T_0) = 1$ lorsque le groupe dénombrable G est moyennable.

Ce sous-espace n'étant pas compact, la réponse n'est pas immédiate.

On l'obtient à l'aide du théorème ergodique de minimax sur les fonctions semi-continues supérieurement et de la construction d'ordres totaux particuliers à l'aide du lemme de pavage suivant :

Soient Λ , A et D trois parties finies du groupe G ; on suppose que l'élément neutre e de G appartient à D .

Il existe alors une partition de Λ , dont les atomes sont contenus dans des translatés à droite de la partie A , telle que la proportion des points g de Λ dont tous les translatés à gauche dg par les éléments de D sont dans le même atome, est supérieure à

$$\left(1 - \frac{m_D(\Lambda)}{|\Lambda|}\right) \left(\frac{|A|}{|D^{-1}A|}\right) \left(1 - \frac{m_D(A)}{|A|}\right).$$

A. Connes, J. Feldman et B. Weiss ont montré l'hyperfinitude des actions moyennables, c'est-à-dire le fait qu'il existe alors un automorphisme ayant les mêmes orbites que l'action initiale.

Les résultats décrits plus haut permettent de donner une présentation assez simple de ce résultat, du moins dans le cas des actions de groupes moyennables dénombrables sur des espaces probabilisés standard ([18], chapitre 8).

DENSITE DE CERTAINES MESURES DE PROBABILITE SUR LES ESPACES SYMBOLIQUES ET GROUPES MOYENNABLES

Dubbins a posé la question suivante : les mesures ergodiques, c'est-à-dire extrémales, parmi les probabilités invariantes par translations sur l'espace symbolique I^G , où I est fini et G est moyennable, sont-elle denses en topologie vague ?

A. Rosenthal a répondu positivement à cette question en utilisant la version du lemme de Rokhlin inventée par Ornstein et Weiss.

A partir du lemme de pavage cité plus haut et des partitions aléatoires du groupe G que l'on en déduit, il est possible de construire, pour toute mesure de probabilité μ sur X , une famille (μ_F) indexée par les parties finies du groupe, de probabilités ergodiques ; cette famille converge en topologie vague vers μ si G est moyennable.

Les éléments de cette famille sont non seulement ergodiques, mais possèdent aussi des propriétés très fortes de mélange [19].

Une réciproque partielle au problème de Dubbins est aussi obtenue : si le groupe n'est pas moyennable, la demi-somme des masses de Dirac sur les configurations constantes (dans le cas où I a deux éléments) n'est pas dans l'adhérence vague de l'ensemble des μ_F , où μ décrit l'ensemble des probabilités et F l'ensemble $\mathcal{F}(G)$ des parties finies de G .

Ainsi se termine cette présentation. Je n'ai pas donné aux divers sujets une place proportionnelle à leur importance et j'ai développé un peu plus les plus anciens qui ne se retrouvent pas dans mon "Lecture Notes".

On trouvera dans ce livre [18], outre les résultats originaux cités dans cette note, un exposé systématique qui complète cette présentation là où l'on pourrait la trouver trop elliptique.

LISTE DES TRAVAUX ET PUBLICATIONS

1. Mesures de Gibbs et mesures de Gibbs canoniques. *Séminaire sur les processus markoviens à une infinité de particules, Ecole Polytechnique* (1976).
2. Mesures quasi-invariantes à dérivée continue. *C. R. Acad. Sci. Paris* **282** (1976), 1371–1373.
3. Systèmes dynamiques topologiques. *Bull. Soc. Math. France* **105** (1977), 405–414.
4. A note about Hedlund's theorem, in *Systèmes dynamiques - Varsovie 1977, Astérisques* **50** (1977), 311–313.
5. Free energy in spin-flip processes in non-increasing. *Comm. math. Physics* **55** (1977), 29–35.
6. Fonctions thermodynamiques locales en mécanique statistique. *Séminaire sur les processus markoviens à une infinité de particules, Ecole Polytechnique* (1976).
7. L'équilibre thermodynamique dans les systèmes infinis de particules. *Séminaire sur les processus markoviens à une infinité de particules, Ecole Polytechnique* (1978).
8. The variational principle for amenable groups in statistical mechanics, prépublication 1978.
9. Groupes pavables et principe variationnel. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **48** (1979), 71–79.
10. Un problème de minimum pour le couplage de deux probabilités. *C. R. Acad. Sci. Paris* **287** (1978), 153–156.
Complément à cette note.
11. Une nouvelle démonstration du théorème de E. Følner. *C. R. Acad. Sci. Paris* **287** (1978), 557–560.
12. Le filtre capacitaire pour les groupes localement compacts moyennables.

Ces articles et travaux (1 à 12) constituaient ma thèse d'état.

13. Dynamical systems of total orders, in Ergodic Theory, *Lecture Notes in Mathematics* **729**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1979), 153–162.
14. Mesures de Gibbs invariantes et mesures d'équilibre. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **55** (1981), 11–23.
15. Le principe variationnel. Prépublication de l'université Paris–Nord (1979). The variational principle. *Studia Mathematica* LXXII (1982), 151–159.
16. Filtre moyennant et valeur moyenne des capacités invariantes. *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), 259–277.
17. Théorème ergodique presque sous-additif. *Ann. I. H. P.* vol. **XIX** (1983), 257–266.
18. Théorie ergodique et mécanique statistique. Prépublication de l'université Paris–Nord (1983). Ergodic Theory and Statistical Mechanics. *Lecture Notes in Mathematics* **1115**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo (1985).
19. Densité de certaines mesures de probabilité ergodiques sur les espaces symboliques et groupes moyennables. *C. R. Acad. Sci. Paris* **300** série I n° 17 (1985), 609–612.