PROBABILITÉS. — *Densité de certaines mesures de probabilité ergodiques sur les espaces symboliques et groupes moyennables.* Note de **Jean Moulin Ollagnier**, présentée par Robert Fortet.

Soit X l'espace symbolique I^G où I est un ensemble fini et G un groupe. Nous construisons une famille de probabilités ergodiques pour l'action de G sur X par translations; cette famille est dense en topologie vague dans le convexe compact M(X, T) des probabilités invariantes si et seulement si le groupe est moyennable.

PROBABILITY THEORY. — Density of certain ergodic probability measures in symbolic spaces and amenable groups.

Let X *be the symbolic space* I^G, *where* G *is a group and* I *a finite set. We construct a family of invariant ergodic probability measures for the action of* G *on* X *by translations. With respect to the vague topology, this family is dense in the convex and compact set* M(X, T) *of all invariant probabilities if and only if the group is amenable.*

Nous nous intéressons à l'espace compact $X=I^G$, où I est un ensemble fini à plusieurs éléments et G un groupe sur lequel nous ne supposons aucune topologie. Les translations sont les applications T^g, où g est un élément de G, de X dans lui-même ainsi définies :

$$T^g(\xi)(h)=\xi(hg).$$

L'application $g\to T^g$ est une action de G sur X par homéomorphismes. Il n'y a besoin de faire aucune hypothèse sur le groupe pour obtenir l'existence de probabilités de Radon invariantes sous cette action; en effet, les mesures produits sont invariantes.

Les probabilités que nous construisons sont une généralisation des mesures produits; elles vérifient des propriétés très fortes de mélange et sont en particulier ergodiques.

Notation. — Étant donnée une mesure de probabilité μ sur X et une partie finie A de G, μ_A désigne la trace de μ sur I^A.

Définition. — Étant données une probabilité invariante μ sur X et une partie finie A de G, on appelle $\mu(F, A)$ la probabilité sur I^A ainsi construite :

A tout ordre total τ sur $F^{-1}.A$ ($F^{-1}.A=\{g\in G,\ Fg\cap A\neq\varnothing\}$), on associe la partition de A dont les atomes sont les éléments non-vides de la suite finie construite par récurrence :

$$\begin{gathered}A_1(\tau)=A\cap Fg_1,\\ A_2(\tau)=(A\cap Fg_2)\setminus A_1,\\ \dots\dots\dots\dots,\\ A_k(\tau)=(A\cap Fg_k)\setminus A_{k-1},\\ \dots\dots\dots\dots\end{gathered}$$

$g_1, g_2, \dots, g_n$ désignant les éléments de $F^{-1}.A$ dans l'ordre τ.

On appelle $\mu(F, A, \tau)$ la mesure produit des projections :

$$\mu(F, A, \tau)=\bigotimes_i \mu_{A_i}(\tau).$$

La probabilité $\mu(F, A)$ est alors définie comme la moyenne équilibrée des $\mu(F, A, \tau)$ sur tous les ordres totaux sur $F^{-1}.A$:

$$\mu(F, A)=(1/|F^{-1}.A|!).\sum_\tau \mu(F, A, \tau).$$

Proposition 1. — *La famille de probabilités* ($\mu(F, A)$, $A\in F(G)$) *est un système projectif de mesures.*

0249-6321/85/03000609 $ 2.00

Démonstration. — Soit une partie finie A, réunion des parties disjointes A′ et A″; on peut calculer :

$$\mu(F, A)_{A'} = (1/|F^{-1}.A|!) . \sum_{\tau \in T(F^{-1}.A)} \mu(F, A, \tau)_{A'}.$$

Or $\mu(F, A, \tau)_{A'}$ ne dépend que de la trace de l'ordre τ sur $F^{-1}.A'$.

Il suffit donc de s'assurer que le nombre d'ordres totaux sur $F^{-1}.A$ dont la restriction à $F^{-1}.A'$ est un ordre donné ne dépend pas de ce dernier; c'est élémentaire.

Appelons alors μ_F la limite projective de ce système de mesures et intéressons-nous à la famille des mesures ainsi construites.

PROPOSITION 2. — *Pour toute mesure de probabilité* μ *sur* X, *invariante sous l'action de* G *par translations, et pour toute partie finie* F *de* G, *la probabilité* μ_F *précédemment construite est invariante.*

De plus, elle vérifie la propriété d'indépendance suivante :

Dès que les parties finies $F^{-1}.A'$ *et* $F^{-1}.A''$ *sont disjointes, les traces de* μ_F *sur* $I^{A'}$ *et* $I^{A''}$ *sont indépendantes.*

Démonstration. — Il suffit, pour établir l'invariance, de s'assurer, pour tout élément g de G et pour toute fonction f ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées, de l'égalité :

$$\mu_F(f \circ T^g) = \mu_F(f).$$

Supposons donc que f ne dépende que des coordonnées dans A. La mesure $\mu_F(f)$ est égale à $\mu(F, A)(\bar{f})$ où $\bar{f}$ est la fonction sur I^A à travers laquelle on factorise f.

De même, on a l'égalité :

$$\mu_F(f \circ T^g) = \mu(F, Ag)(\bar{f} \circ T^g).$$

Pour chaque ordre total τ sur $F^{-1}.A$, on a :

$$\mu(F, A, \tau)(\bar{f}) = \mu(F, Ag, \tau')(\bar{f} \circ T^g),$$

où τ' est l'image de τ par la translation T^g; ceci résulte de l'invariance de μ sous l'action de G.

On obtient alors le résultat par sommation, et l'on peut conclure à l'invariance de F.

Montrons maintenant la propriété d'indépendance annoncée.

Pour chaque couple (τ', τ'') où τ' est un ordre total sur $F^{-1}.A'$ et τ'' un ordre total sur $F^{-1}.A''$, il existe des ordres τ sur $F^{-1}.(A' \cup A'')$ qui prolongent τ' et τ'' puisque $F^{-1}.A$ et $F^{-1}.A''$ sont disjoints; le nombre de ces prolongements ne dépend pas du couple choisi.

De plus, pour un tel ordre τ, la mesure $\mu(F, A' \cup A'', \tau)$ est le produit tensoriel de $\mu(F, A', \tau')$ et de $\mu(F, A'', \tau'')$.

On en déduit simplement le résultat.

COROLLAIRE 1. — *Il résulte de la propriété d'indépendance établie dans la proposition* 2 *que les systèmes dynamiques mesurés sur* X, *correspondant aux mesures* μ_F, *où* μ *est une probabilité invariante quelconque, et* F *une partie finie de* G, *possèdent la propriété de mélange fort; ces mesures particulières sont donc ergodiques.*

THÉORÈME 1. — *Si le groupe* G *est moyennable, la famille de probabilités ergodiques sur* X, $(\mu_F,\ \mu \in M(X, T),\ F \in \mathcal{F}(G))$ *est dense en topologie vague dans le convexe compact* M(X, T) *de toutes les probabilités invariantes par translation.*

Démonstration. — On peut définir la topologie vague sur M(X, T) par la famille d'écarts (d_A, $A \in F(G)$) :

$$d_A(\mu, \nu) = \sum_{\eta \in I^A} |\mu_A(\eta) - \nu_A(\eta)| \leqq 2.$$

On obtient simplement une majoration de $d_A(\mu, \mu_F)$, égale à $d_A(\mu_A, \mu(F, A))$:

$$d_A(\mu_A, \mu(F, A)) \leqq (1/|F^{-1}.A|!) . \sum d_A(\mu_A, \mu(F, A, \tau))$$
$$\leqq 2 . (1/|F^{-1}.A|!) . |\{\tau, A_1(\tau) \neq A\}|,$$

car, si la partition de A correspondant à l'ordre τ est triviale, $\mu(F, A, \tau)$ coïncide avec μ_A.

Il reste à montrer que, pour une partie A fixée, il existe des parties finies F telles que la proportion des ordres sur $F^{-1}.A$ qui donnent une partition triviale de A soit aussi proche de 1 que l'on veut.

Cette proportion est égale au quotient :

$$|\{g, Fg \supset A\}| / |F^{-1}.A|$$

et la moyennabilité de G permet de conclure.

Théorème 2. — *Si le groupe G n'est pas moyennable, la mesure invariante ν sur $\{0,1\}^G$, définie par $\nu = (1/2)(\delta_0 + \delta_1)$, où δ_0 et δ_1 sont les masses de Dirac sur les deux configurations constantes, n'est pas une limite vague d'une famille de μ_F.*

Démonstration. — Puisque le groupe G n'est pas moyennable, il existe une partie finie A de G telle que la borne supérieure du rapport :

$$|\{g, Fg \supset A\}| / |F^{-1}.A|,$$

soit strictement inférieure à 1; soit $1-k$ cette borne.

Pour toute partie finie F, la fréquence des ordres sur $F^{-1}.A$ pour lesquels la partition correspondante de A n'est pas triviale, est alors supérieure ou égale à k.

Il existe donc une partie finie $\{x, y\}$ de A à deux éléments telle que x et y soient dans deux atomes distincts de la partition avec une fréquence supérieure à $2k/n(n-1)$ si n est le cardinal de A; soient alors k' ce nombre non nul et $\{x, y\}$ une partie vérifiant la propriété précédente.

Il est clair que l'écart $d_A(\nu, \mu_F)$ est minoré par l'écart $d_{\{x, y\}}(\nu, \mu_F)$, c'est-à-dire par la somme :

$$|\nu(E_1) - \mu_F(E_1)| + |\nu(E_2) - \mu_F(E_2)| + |\nu(E_3) - \mu_F(E_3)| + |\nu(E_4) - \mu_F(E_4)|,$$

où E_1, E_2, E_3 et E_4 sont les quatre cylindres $[\varnothing, \{x, y\}]$, $[\{x\}, \{x, y\}]$, $[\{y\}, \{x, y\}\}$, et $[\{x, y\}\}, \{\{x, y\}]$. On appelle a, b, c et d les mesures de ces cylindres pour la probabilité μ et t la fréquence (minorée par le nombre k' strictement positif) avec laquelle x et y sont séparés.

L'invariance de μ impose l'égalité des nombres c et d. L'écart $d_{\{x, y\}}(\nu, \mu_F)$ est alors égal à :

$$\left|\frac{1}{2} - t(b+c)^2 - (1-t)b\right| + \left|\frac{1}{2} - t(a+c)^2 - (1-t)a\right| + 2\,|t(a+c)(b+c) + c(1-t)|.$$

Il reste à montrer que le minimum de cette fonction continue sur le compact de $\mathbb{R}^3$ défini par les relations :

$$k' \leqq t \leqq 1, \qquad 0 \leqq a,\ b,\ c \leqq 1, \qquad a+b+2c=1,$$

est strictement positif.

Il suffit pour cela de vérifier que cette fonction positive ou nulle ne s'annule pas sur le compact.

La vérification de cette propriété est simple.

Remarques. — Les fonctions $A \to 1-\mu_F([A, A])$, où $[A, A]$ est le cylindre constitué des configurations égales à 1 en tous les points de A, sont des éléments extrémaux du convexe des capacités alternées d'ordre infini, comprises entre 0 et 1.

Ceci fournit donc une famille explicite d'éléments extrémaux de ce convexe pour un groupe discret et répond ainsi partiellement à une question de Michel Talagrand [2].

Le théorème 1 est une réponse à une question de Dubbins; une démonstration de la densité des mesures ergodiques pour un groupe moyennable a été obtenue par Alain Rosenthal [1] en utilisant la version du lemme de Rokhlin pour les groupes moyennables inventée par Ornstein et Weiss.

Remise le 11 mars 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. ROSENTHAL, Transformations mélangeantes, K-automorphismes, exemples et propriétés abstraites, *Thèse de 3e cycle*, Université Pierre-et-Marie-Curie.

[2] M. TALAGRAND, Capacités invariantes extrémales, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 28, n° 4, 1978, p. 76-146.

Département de Mathématiques, Centre scientifique et polytechnique, Université Paris-Nord, avenue Jean-Baptiste-Clément, 93430 *Villetaneuse.*