THÉORIE ERGODIQUE. — *Une nouvelle démonstration du théorème de E. Følner.* Note (*) de **Jean Moulin-Ollagnier** et **Didier Pinchon,** transmise par M. Robert Fortet.

Pour un groupe dénombrable possédant la propriété de point fixe, le théorème de Erling Følner ([1]) assure l'existence d'un filtre moyennant sur l'ensemble des parties finies du groupe. L'étude d'une action particulière de ce groupe, les translations à droite sur l'espace de ses ordres totaux, fournit une démonstration nouvelle de ce résultat.

For a countable group with the fixed point property, a theorem due to Erling Følner shows that there exists a ameaning filter on the set of finite parts of the group. Properties of a particular action of the group, right translations on the space of all total orders, lead to a new proof of this result.

I. LE FILTRE MOYENNANT. — Soit G un groupe dénombrable et $\mathscr{F}(G)$ l'ensemble de ses parties finies. Soit D dans $\mathscr{F}(G)$; on mesure le défaut de D-invariance des éléments de $\mathscr{F}(G)$ par la fonction m_D :

$$m_D(A)=|\{x\in A, (\exists d\in D), dx\notin A\}|,$$

où la notation $|\,.\,|$ désigne le cardinal d'un ensemble fini.

Soit ε un réel strictement positif; on pose

$$M(D, \varepsilon)=\{A\in\mathscr{F}(G), m_D(A)\leqq\varepsilon|A|\}.$$

Si, pour tout D de $\mathscr{F}(G)$ et ε positif, les ensembles $M(D, \varepsilon)$ sont non vides, ils constituent une base d'un filtre sur $\mathscr{F}(G)$, appelé filtre moyennant de G. Établir l'existence du filtre moyennant consiste donc à montrer que toutes les fonctions m_D vérifient :

$$\inf_{A\in\mathscr{F}(G)}|A|^{-1}.m_D(A)=0.$$

Les fonctions m_D vérifient les propriétés suivantes :

(*a*) $m_D(\emptyset)=0$;

(*b*) $(\forall A\in\mathscr{F}(G))$, $(\forall a\in G)$, $m_D(Aa)=m_D(A)$ (invariance par translations à droite);

(*c*) $(\forall A\in\mathscr{F}(G))$, $(\forall B\in\mathscr{F}(G))$, $m_D(A\cup B)+m_D(A\cap B)\leqq m_D(A)+m_D(B)$ (forte sous-additivité);

(*d*) $(\exists K>0)$, $(\forall A\in\mathscr{F}(G))$, $(\forall a\in G)$, $m_D(A\cup a)-m_D(A)\geqq -K$ (les accroissements élémentaires sont bornés inférieurement).

On désigne par $\mathscr{C}$ le cône des fonctions réelles sur $\mathscr{F}(G)$ vérifiant les quatre propriétés précédentes.

Pour un élément f de $\mathscr{C}$, on note $q(f)$ le nombre $\inf\limits_{A\in\mathscr{F}(G)}|A|^{-1}.f(A)$. La fonctionnelle q sur $\mathscr{C}$ est croissante, sur-additive et positivement homogène.

PROPOSITION. — *Si q est sous-additive, le filtre moyennant existe.*

Démonstration. — On vérifie $m_D\leqq\sum\limits_{d\in D}m_{\{d\}}$ et donc, si q est sous-additive

$$q(m_D)\leqq q(\sum_{d\in D}m_{\{d\}})\leqq\sum_{d\in D}q(m_{\{d\}}).$$

Pour achever la démonstration, montrons que, pour tout d de G, $q(m_{\{d\}})=0$. Soit H le sous-groupe engendré par d. Si H est fini, $m_{\{d\}}(\mathrm{H})=0$. Sinon, pour $\mathrm{A}_n=\{e, d, \ldots, d^{n-1}\}$, on a $|\mathrm{A}_n|^{-1}.m_d(\mathrm{A}_n)=1/n$.

Toute la combinatoire du problème se réduit donc à montrer la sous-additivité de la fonctionnelle q sur $\mathscr{C}$. Lorsque le groupe G possède la propriété de point fixe, cette sous-additivité résulte de l'identification de q avec une borne supérieure de formes linéaires. C'est l'objet de la partie suivante.

II. Système dynamique des ordres totaux. — Soit G un groupe dénombrable et T l'ensemble des ordres totaux sur G. Si F est une partie finie de G et t un ordre total sur F, on désigne par $\mathrm{O}(\mathrm{F}, t)$ le sous-ensemble de T des ordres totaux dont la restriction à F est t. Ces ensembles forment sur T une base de topologie. Muni de cette topologie, T est un espace compact métrisable.

Soit b une bijection de G. On note encore b l'homéomorphisme de T obtenu de la façon suivante : si τ est un ordre total sur G, $b(\tau)$ est l'ordre total défini par $b(x)\,b(\tau)\,b(y) \Leftrightarrow x\,\tau\,y$.

On vérifie qu'il existe sur T une probabilité π et une seule, invariante par toutes les bijections. Elle est entièrement déterminée par sa valeur sur les $\mathrm{O}(\mathrm{F}, t)$; $\pi(\mathrm{O}(\mathrm{F}, t))=1/|\mathrm{F}|!$ En particulier, G agit sur T par translation à droite et π est une probabilité G-invariante. On désigne par $\mathscr{M}(\mathrm{T}, \mathrm{G})$ l'ensemble convexe faiblement compact des formes linéaires positives G-invariantes, de masse totale 1, sur l'espace de Banach $\mathrm{B}(\mathrm{T})$ des fonctions bornées sur T.

A chaque élément f du cône $\mathscr{C}$ défini dans la première partie, correspond une famille particulière de fonctions bornées sur T. Soit f un élément de $\mathscr{C}$ et a un élément du groupe G; on pose

$$f_a(\mathrm{A})=f(\mathrm{A}\cup a)-f(a) \quad \text{pour } \mathrm{A}\in\mathscr{F}(\mathrm{G}).$$

La forte sous-additivité de f entraîne que f_a est une fonction décroissante de la partie finie A pour l'inclusion. Le prolongement de f_a par monotonie à toutes les parties de G est encore noté f_a. On définit alors la fonction bornée φ_a sur T par $\varphi_a(\tau)=f_a(a_\tau^-)$, où a_τ^- désigne l'ensemble des éléments de G strictement inférieurs à a pour l'ordre τ.

Il est facile de vérifier, à cause de l'invariance à droite de f que $\varphi_a=\varphi_e\circ a^{-1}$, où a^{-1} désigne la translation à droite dans T par l'élément a^{-1} de G.

Théorème 1. — *Soit f dans $\mathscr{C}$ et φ_e la fonction associée sur* T. *On a*

$$q(f)=\inf_{\mathrm{A}\in\mathscr{F}(\mathrm{G})}[|\mathrm{A}|^{-1}.\sup_{\tau\in\mathrm{T}}(\sum_{g\in\mathrm{A}}\varphi_e\circ g^{-1}(\tau))].$$

Démonstration. — Soit A une partie finie de G; montrons que

$$f(\mathrm{A})=\sup_{\tau\in\mathrm{T}}(\sum_{g\in\mathrm{A}}\varphi_g(\tau)).$$

Soit τ un ordre total et $g_1, \ldots, g_n (n=|\mathrm{A}|)$ les éléments de A rangés par ordre croissant. Il vient

$$\begin{aligned}\sum_{g\in\mathrm{A}}\varphi_g(\tau)&=f_{g_1}(g_{1\tau}^-)+\ldots+f_{g_n}(g_{n\tau}^-).\\ &\leqq f_{g_1}(\varnothing)+f_{g_2}(\{g_1\})+\ldots+f_{g_n}(\{g_1, \ldots, g_{n-1}\})=f(\mathrm{A})\end{aligned}$$

et l'égalité est obtenue si τ est un ordre total dont les premiers éléments sont les éléments de A.

THÉORÈME 2. — *Avec les notations du théorème précédent, si* G *possède la propriété de point fixe, on a*

$$\sup_{\mu \in \mathscr{M}(T, G)} \mu(\varphi_e) = q(f).$$

Démonstration. — Il résulte directement du théorème 1 l'inégalité $\sup_{\mu \in \mathscr{M}(T, G)} \mu(\varphi_e) \leqq q(f)$.

Soit E_f le sous-espace G-invariant de B(T) engendré par φ_e, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires des $(\varphi_a,\ a \in G)$. Soit μ une forme linéaire G-invariante sur E_f vérifiant :

$$(1) \quad (\forall \psi \in E_f), \quad \mu(\psi) \leqq \sup_{\tau \in T} \psi(\tau).$$

Par le théorème de Hahn-Banach, elle peut être prolongée à B(T) tout entier. Un prolongement $\bar{\mu}$ de μ vérifie :

$$(\forall \psi \in B(T)), \quad \bar{\mu}(\psi) \leqq \sup_{\tau \in T} \psi(\tau),$$

ce qui est équivalent à dire que $\bar{\mu}$ est une forme linéaire positive de masse 1 sur B(T).

L'ensemble de ces prolongements est un convexe compact sur lequel G agit comme un groupe de transformations affines continues. Il y a donc un point fixe : c'est dire que μ admet un prolongement dans $\mathscr{M}(T, G)$.

On définit alors la forme linéaire μ sur E_f par

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \varphi_{a_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i\right) . q(f).$$

Cette forme linéaire est clairement G-invariante. Puisque $\mu(\varphi_e) = q(f)$, il suffit, pour achever la démonstration, d'établir que μ vérifie (1).

En séparant les coefficients positifs des coefficients négatifs, il s'agit de montrer

$$\sup_T \psi = \sup_T \left(\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i \varphi_{a_i} - \sum_{j=1}^{j=l} \beta_j \varphi_{b_j}\right) \geqq \left(\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i - \sum_{j=1}^{j=l} \beta_j\right) . q(f),$$

avec

$$0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_k \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq \beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \ldots \leqq \beta_l.$$

En effectuant une transformation d'Abel, il vient

$$\psi = \alpha_1 \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_{a_i} + (\alpha_2 - \alpha_1) \sum_{i=2}^{i=n} \varphi_{a_i} + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \varphi_{a_k}$$
$$+ \beta_1 \sum_{j=1}^{j=l} (-\varphi_{b_j}) + \ldots + (\beta_l - \beta_{l-1})(-\varphi_{b_l}).$$

En choisissant un ordre total τ pour lequel $a_k < a_{k-1} < \ldots < a_1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_l$ et pour tout autre élément a, $a_1 < a < b_1$ on peut réaliser simultanément le maximum de toutes les sommes. On en déduit

$$\sup_{T} \psi = \alpha_1 f(\{a_1, \ldots, a_k\}) + (\alpha_2 - \alpha_1) f(\{a_2, \ldots, a_k\}) + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1}) f(\{a_k\})$$
$$+ \beta_1 g(\{b_1, \ldots, b_l\}) + \ldots + (\beta_l - \beta_{l-1}) g(\{b\}),$$

où l'élément g du cône $\mathscr{C}$ est défini par $g(\mathrm{A}) = \sup\{f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}),\ \mathrm{B} \in \mathscr{F}(\mathrm{G} - \mathrm{A})\}$. D'où la minoration de $\sup \psi$:

$$\sup_{T} \psi \geqq q(f).(k\alpha_1 + (k-1)(\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1}))$$
$$+ q(g).(l\beta_1 + (l-1)(\beta_2 - \beta_1) + \ldots + (\beta_l - \beta_{l-1})),$$

ce qui s'écrit encore

$$\sup_{T} \psi \geqq (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) q(f) + (\beta_1 + \ldots + \beta_l) q(g).$$

Le lemme suivant permet alors d'achever la démonstration du théorème 2.

LEMME. — *Soit f appartenant à $\mathscr{C}$ et g la fonction sur $\mathscr{F}(\mathrm{G})$ définie par*

$$g(\mathrm{A}) = \sup\{f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}),\ \mathrm{B} \in \mathscr{F}(\mathrm{G} - \mathrm{A})\}.$$

La fonction g appartient aussi au cône $\mathscr{C}$ et vérifie $q(g) \geqq -q(f)$.

(*) Séance du 10 juillet 1978.

([1]) E. FØLNER, *Math. Scand.*, 3, 1955, p. 243-254.

J. M. O. : *Département de Mathématiques, Centre scientifique et polytechnique, Université Paris-Nord, avenue Jean-Baptiste Clément*, 93430 *Villetaneuse*.

D. P. : *Laboratoire de Calcul des Probabilités, Université Pierre-et-Marie-Curie*, Tour 56, 4, *place Jussieu*, 75230 *Paris Cedex* 05.