Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
48, 71–79 (1979)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete


# Groupes pavables et principe variationnel

Jean Moulin Ollagnier[1] et Didier Pinchon[2]

[1] Département de Mathématiques, Université Paris-Nord,
avenue J.B. Clément, F-93430 Villetaneuse, France
[2] Laboratoire de Probabilité, Université Pierre et Marie Curie,
4, place Jussieu – Tour 56, F-75230 Paris Cedex 05, France

## Introduction

Kieffer a réussi à généraliser à tout groupe moyennable la notion d'entropie moyenne en utilisant la forte sous-additivité de l'entropie [1, 3]. Pour un groupe dénombrable, la moyennabilité est la propriété qui permet d'attribuer une valeur moyenne aux fonctions invariantes fortement sous-additives définies sur les parties finies de ce groupe. On est conduit pour attribuer une valeur moyenne aux fonctions invariantes faiblement sous-additives à la notion a priori plus restrictive de groupe pavable. De telles fonctions interviennent, par exemple, dans l'une des définitions équivalentes de la pression données par Walters [7]. Cette étude est l'objet de la première partie. Une définition fonctionnelle des pavés est donnée et on montre l'équivalence avec une définition géométrique.

Une démonstration générale du principe variationnel a été donnée par Walters [7] pour l'action de $\mathbb{Z}^+$ sur un espace métrique compact. Une généralisation de ce résultat à $\mathbb{Z}^{+n}$ a été obtenue par Misiurewicz [5]: dans sa démonstration directe très élégante il utilise d'une manière décisive la possibilité de paver $\mathbb{Z}^{+n}$ par des parallélépipèdes. Dans une deuxième partie nous généralisons sa démonstration à des groupes pavables. Nous sommes amenés à exiger des pavés une propriété supplémentaire à leur simple définition, fonctionnelle ou géométrique. Cette propriété de pavé fort apparait dans l'article de Ornstein et Weiss sur le théorème de Rochlin-Kakutani [6].

## I. Groupes pavables

Soit $G$ un groupe dénombrable, $F(G)$ l'ensemble des parties finies de $G$. Soit $D$ une partie finie de $G$ et $\varepsilon$ un nombre positif. $M(D, \varepsilon)$ désigne le sous-ensemble de $F(G)$ des parties finies $A$, invariantes par les translations à gauche par les éléments de $D$ à $\varepsilon$ près:

$$A \in M(D, \varepsilon) \quad \text{si} \quad |\{x \in A, \forall d \in D, dx \in A\}|/|A| \geqq 1 - \varepsilon$$

où la notation $|\cdot|$ désigne le cardinal.

0044-3719/79/0048/0071/$01.80

*Définition.* Si tous les $M(D,\varepsilon)$ sont non vides, on dit que le groupe $G$ est moyennable. Les $M(D,\varepsilon)$ forment alors la base d'un filtre $\mathfrak{M}$ sur $F(G)$ appelé filtre moyennant.

*Remarque.* D'après les résultats de Følner [2], cette propriété est équivalente à l'existence d'une moyenne invariante à gauche sur les fonctions bornées sur $G$.

Soit $\mathbf{C}$ le cône des fonctions $f$ de $F(G)$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$f(\emptyset)=0,$
$\forall a\in G, \forall A\in F(G), \quad f(A)=f(Aa)$ (invariance à droite),
$\forall A,B\in F(G), \quad f(A\cup B)+f(A\cap B)\leqq f(A)+f(B)$ (sous-additivité forte),
$\forall A,B\in F(G), \quad A\subset B\Rightarrow f(A)\leqq f(B)$ (croissance).

On appelle $p$ la fonctionnelle sur-additive, positivement homogène, croissante définie sur $C$ par

$$p(f)=\inf\{|A|^{-1}f(A),\ A\in F(G)-\emptyset\}.$$

Les groupes moyennables permettent d'attribuer une «valeur moyenne» aux fonctions de $\mathbf{C}$.

**Théorème.** *Soit $G$ un groupe dénombrable moyennable. Soit $f$ une fonction de $C$. Alors la limite de $|A|^{-1}f(A)$ selon le filtre moyennant $\mathfrak{M}$ existe et est égale à $p(f)$.*

Une démonstration de ce théorème est donnée dans l'appendice A. On peut remarquer que le filtre moyennant est défini à partir de fonctions fortement sous-additives particulières, les fonctions de «défaut d'invariance»:

$$m_D(A)=|\{x\in A,\ \exists\, d\in D,\ dx\notin A\}| \text{ par } M(D,\varepsilon)=\{A\in F(G),\ |A|^{-1}m_D(A)<\varepsilon\}.$$

De façon analogue, on introduit le cône $\mathbf{K}$ des fonctions de $F(G)$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$f(\emptyset)=0,$
$\forall a\in G, \forall A\in F(G), \quad f(A)=f(Aa),$
$\forall A,B\in F(G)$ avec $A\cap B=\emptyset, \quad f(A\cup B)\leqq f(A)+f(B)$
(sous-additivité faible).

On souhaite de la même façon que précédemment attribuer une valeur moyenne à ces fonctions et pour cela trouver un filtre plus fin que $\mathfrak{M}$ selon lequel $|A|^{-1}f(A)$ admet une limite. On introduit alors la fonctionnelle sous-additive, positivement homogène, croissante $q(f)=\limsup\limits_{\mathfrak{M}}|A|^{-1}f(A)$.

*Définitions.* On appelle pavés de $G$, les parties $B$ finies de $G$ telles que $q(f)\leqq|B|^{-1}f(B)$ pour tout $f$ de $\mathbf{K}$. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des pavés de $G$. S'il existe des pavés arbitrairement moyennants, c'est à dire pour tout $(D,\varepsilon)$, $M(D,\varepsilon)\cap\mathscr{P}=P(D,\varepsilon)\neq\emptyset$, on dit que le groupe moyennable $G$ est pavable.

Les ensembles $P(D,\varepsilon)$ forment la base d'un filtre $\mathfrak{P}$ appelé filtre pavant.

On vérifie que pour tout $f$ de $\mathbf{K}$

$$\lim_{\mathfrak{P}}|B|^{-1}f(B)=\limsup_{\mathfrak{M}}|A|^{-1}f(A)=\inf\{|A|^{-1}f(A),\ A\in\mathscr{P}\}.$$

*Propriétés géométriques des pavés.* Soit $B$ une partie finie de $G$. On appelle $p_B$ la fonction définie sur $F(G)$ qui mesure le défaut de recouvrement par des translatés disjoints de $B$:

$$p_B(A)=\inf\{|A'|, A'\subset A \text{ et } A-A' \text{ réunion disjointe de translatés à droite de } B\}.$$

On vérifie que $p_B$ est dans $\mathbf{K}$ et que $p_B(B)=0$. Donc si $B$ est un pavé, $q(p_B) \leqq |B|^{-1}p_B(B)=0$ et la limite selon le filtre $\mathfrak{M}$ de $|A|^{-1}p_B(A)$ existe et est nulle. Ceci permet de démontrer que les pavés sont les ensembles finis dont des translatés à droite disjoints recouvrent exactement $G$.

**Théorème.** *Soit $B$ un pavé de $G$. Il existe une partie $R$ de $G$ telle que les $Br$, $r\in R$ soient disjoints et $\bigcup_{r\in R} Br=G$ et réciproquement.*

*Démonstration.* Puisque $B$ est un pavé

$$\forall \eta>0,\ \exists (E,\varepsilon),\ \forall A\in M(E,\varepsilon), \qquad p_B(A)<\eta\cdot|A|$$

ce qui signifie qu'il existe une partie finie $F$ de $G$ telle que les $Bf$, $f\in F$ sont disjoints, inclus dans $A$ et tels que $|A-B\circ F|<\eta|A|$. Par convention la notation $B\circ F$ désigne $\bigcup_{f\in F} Bf$ si les $Bf$ sont disjoints.

Soit $D$ une partie finie de $G$ contenant l'élément neutre. On choisit $\eta<\frac{1}{2}|D|^{-1}$ et soit $A$ dans $M(D\cup E,\delta)$ où $\delta=\inf(\varepsilon,\frac{1}{2})$.

$$|\{x\in A, \forall d\in D,\ dx\in A\}|>(1-\delta)|A| \qquad \text{car } M(D\cup E,\delta)\subset M(D,\delta),$$

$$|\{x\in A, \forall d\in D, dx\in B\circ F\}|>(1-\delta-\eta|D|)\cdot|A|>0 \quad \text{car } |A-B\circ F|<\eta|A|.$$

Donc il existe $x$ dans $A$ tel que $Dx\subset B\circ F$, ce qui signifie que toute partie finie de $G$ peut être recouverte par une réunion disjointe de translatés à droite de $B$. Un procédé diagonal permet alors de recouvrir exactement $G$ par des translatés disjoints de $B$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une partie $R$ de $G$ telle que $B\circ R=G$. On vérifie que $p_B(A)\leqq m_{BB^{-1}}(A)$. Donc si $A$ est dans $M(BB^{-1},\eta)$, on a $|A|^{-1}p_B(A)<\eta$. Soit $f$ dans $\mathbf{K}$, on a $|A|^{-1}f(A)\leqq|B|^{-1}f(B)+p_B(A)f(\{a\})$ où $a$ est un élément de $G$. D'où $q(f)\leqq|B|^{-1}f(B)$ et $B$ est un pavé.

Pour une démonstration ultérieure nous utiliserons le lemme suivant.

**Lemme.** *Soit $B$ un pavé de $G$. Les parties finies de $G$ exactement recouvertes par des translatés à droite disjoints de $B$ sont arbitrairement moyennantes.*

*Démonstration.* Soit $D$ une partie finie de $G$ contenant l'élément neutre et $\xi$ un réel positif. La démonstration du théorème précédent montre que la partie $B\circ F$ satisfait $|\{x\in B\circ F, \forall d\in D, dx\in B\circ F\}|>(1-\delta-\eta|D|)\cdot|A|$ avec $A$ dans $M(D\cup E,\delta)$ et $\delta<\varepsilon$ et le couple $(E,\varepsilon)$ étant tel que, pour tout $A$ de $M(E,\varepsilon)$, $p_B(A)<\eta|A|$. Si nous choisissons $\eta<\xi/2.\ |D|^{-1}$ puis $\delta=\inf(\varepsilon,\xi/2)$, on obtient $B\circ F\in M(D,\xi)$.

Parfois lorsque le pavage intervient de façon naturelle dans une démonstration, on exige des pavés des propriétés supplémentaires et on dit que le groupe est pavable s'il y a suffisamment de tels pavés (arbitrairement moyennants). Par exemple, pour l'étude du théorème de Rochlin-Kakutani, Ornstein et Weiss utilisent la notion suivante de pavé: $B$ est un pavé au sens fort *(strong tiling set)* s'il existe une partition de $G$, $R_1, \ldots, R_k$ avec $k=|B|$ et pour tout $i=1, \ldots, k$: $B \circ R_i = G$.

C'est exactement la même notion qui permet de démontrer le principe variationnel selon Misiurewicz dans la seconde partie.

## II. Principe variationnel pour les groupes pavables

Soit $X$ un espace compact, $G$ un groupe dénombrable moyennable d'homéomorphismes de $X$. On désigne par $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur $X$. $G$ agit sur $C(X)$ de la manière suivante: $g(f)=f \circ g$. Soit $\mathscr{M}^1(X)$ le convexe faiblement compact des probabilités sur $X$. $G$ agit par dualité sur $\mathscr{M}^1(X)$: $m \in \mathscr{M}^1(X)$, $f \in C(X)$, $g \in G$, $g(m)(f)=m(g(f))$. On note $\mathscr{M}^1(X,G)$ le convexe compact des probabilités invariantes sous l'action de $G$. $W$ désigne l'ensemble des entourages symétriques de $X$. Soit $\Lambda$ une partie finie de $G$. On pose $f=\sum_{k\in\Lambda} k(f)$ pour une fonction continue $f$ sur $X$ et $\delta_\Lambda = \bigcap_{k\in\Lambda} k^{-1} \times k^{-1}(\delta)$ pour un entourage $\delta$. On dit qu'un sous-ensemble fini $E$ de $X$ est $(\Lambda,\delta)$-séparé si, pour tous $x$ et $y$ distincts de $E$, $(x,y) \notin \delta_\Lambda$, $(\Lambda,\delta)$-générateur si, pour tout $x$ dans $X$, il existe $y$ dans $E$ tel que $(x,y) \in \delta_\Lambda$. On note $p(f,E)=\operatorname{Log} \sum_{x\in E} \exp f(x)$, puis on définit $P(\Lambda,\delta,f)=\sup\{p(f_\Lambda,E),\ E\ (\Lambda,\delta)\text{-séparé}\}$, enfin

$$P(\delta,f)=\limsup_{\mathfrak{M}} |\Lambda|^{-1} P(\Lambda,\delta,f).$$

Si $\delta \subset \varepsilon$, on a $P(\delta,f) \geqq P(\varepsilon,f)$ et on appelle pression de $f$ le nombre $P(f) = \lim_{\delta\in W} P(\delta,f) = \sup_{\delta\in W} P(\delta,f)$.

Soit $\mu \in \mathscr{M}^1(X,G)$, $A$ une partition borélienne finie de $X$ et $\Lambda$ une partie finie de $G$. $A^\Lambda$ désigne la partition $\bigvee_{k\in\Lambda} k^{-1}A$.

L'entropie de $A^\Lambda$ pour $\mu$, $H_\mu(A^\Lambda)$, est une fonction fortement sous-additive, croissante de $\Lambda$, invariante à droite. Donc $|\Lambda|^{-1} H_\mu(A^\Lambda)$ admet une limite selon le filtre $\mathfrak{M}$ que l'on dénote par $h(A,\mu)$. Enfin on pose $h(\mu)=\sup h(A,\mu)$ sur l'ensemble des partitions boréliennes finies de $X$.

Il est alors possible de montrer, lorsque le groupe $G$ est pavable, pour toute fonction continue $f$ sur $X$, le principe variationnel:

$$P(f)=\sup\{\mu(f)+h(\mu),\ \mu \in \mathscr{M}^1(X,G)\}.$$

On montre d'abord l'inégalité: pour toute probabilité $\mu$ de $\mathscr{M}^1(X,G)$,

$$\mu(f)+h(\mu) \leqq P(f).$$

La démonstration ne suppose, outre la moyennabilité de $G$, que cette seule propriété de $G$: il existe des pavés de cardinal arbitrairement grand. Elle résulte de la proposition suivante.

**Proposition.** *Soit $A$ une partition borélienne finie de $X$, $\xi$ un réel positif et $B$ un pavé de $G$ contenant l'élément neutre de $G$. Il existe un entourage $\delta$ tel que*

$$h(A,\mu)+\mu(f) \leqq P(\delta,f)+2\xi+\operatorname{Log} 2 \cdot |B|^{-1}.$$

*Démonstration.* Soit $a_1, \ldots, a_s$ les éléments de la partition $A^B$. Pour chacun d'entre eux, il existe un compact $b_i$ contenu dans $a_i$ tel que $\mu(a_i - b_i) \leqq \xi/s \cdot \operatorname{Log} s$. Posons $b_0 = X - \bigcup_{i=1}^{s} b_i$ et $D = \{b_0, b_1, \ldots, b_s\}$. On a $H(A^B/D) \leqq \mu(b_0) \cdot \operatorname{Log} s \leqq \xi$. Soit $\Lambda$ une partie de $G$ exactement pavée par $B$, c'est à dire telle qu'il existe une partie finie $F$ de $G$ telle que $\Lambda = B \circ F$. Posons $C = \bigvee_{g \in F} g^{-1} D$ et notons $\alpha(b) = \sup_{x \in b} f_\Lambda(x)$ pour $b \in C$ et

$$\beta = \sum_{b \in C} \exp \alpha(b).$$

On a

$$\int_b f_\Lambda \, d\mu \leqq \alpha(b) \cdot \mu(b)$$

donc

$$\begin{aligned} H_\mu(C) + \mu(f_\Lambda) &\leqq \sum_{b \in C} \mu(b)[\alpha(b) - \operatorname{Log} \mu(b)] \\ &= \beta \cdot \sum_{b \in C} \exp \alpha(b)/\beta \cdot \eta(\mu(b)/\exp \alpha(b)) \end{aligned}$$

où $\eta(x) = -x \operatorname{Log} x$. Puisque $\eta$ est concave, il vient

$$\mu(f_\Lambda) + H_\mu(C) \leqq \beta \cdot \eta\Big(\sum_{b \in C} \exp \alpha(b)/\beta \cdot \mu(b)/\exp \alpha(b)\Big) = \operatorname{Log} \beta. \tag{1}$$

$\varepsilon = X \times X - \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{s} b_i \times b_j$ est un entourage de $X$.

Soit alors $\delta$ avec $\delta \circ \delta \subset \varepsilon$ et tel que $|f(x) - f(y)| < \xi$ si $(x, y) \in \delta$. Soit $E$ un ensemble $(\Lambda, \delta)$-séparé maximal donc $(\Lambda, \delta)$-générateur. Pour tout $b$ dans $C$, il existe $z(b)$ dans $E$ avec

$$\alpha(b) = \sup\{f_\Lambda(x),\ x \in b,\ (x, z(b)) \in \delta_\Lambda\}.$$

Mais si $(x, z(b)) \in \delta_\Lambda$, pour tout $g$ de $\Lambda$, on a $(g x, g z(b)) \in \delta$ et donc

$$f_\Lambda(z(b)) \geqq \alpha(b) - \xi\,|\Lambda|. \tag{2}$$

D'après les définitions de $\delta$ et de $\varepsilon$, on obtient pour $y \in E$ et $g \in F$

$$|\{b \in g^{-1} D,\ \exists\, x \in b,\ (g x, g y) \in \delta\}| \leqq 2.$$

Donc si $y \in E$, $|\{b \in C,\ \exists\, x \in b,\ (x, y) \in \delta_\Lambda\}| \leqq 2^{|F|}$ puisque $\delta_\Lambda \subset \delta_F$. D'où

$$|\{b \in C,\ z(b) = y\}| \leqq 2^{|F|}. \tag{3}$$

D'après (2) et (3)

$$2^{|F|} \cdot \sum_{y \in E} \exp f_\Lambda(y) \geqq \sum_{b \in C} \exp \alpha(b) \cdot \exp -\xi\,|\Lambda|,$$

d'où

$$|F| \cdot \operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log} \sum_{y \in E} \exp f_\Lambda(y) \geqq \operatorname{Log} \beta - \xi\,|\Lambda|. \tag{4}$$

De (1) et (4) on déduit, puisque $|A|=|B|\cdot|F|$:

$$|A|^{-1} H_\mu(C)+\mu(f) \leqq |A|^{-1} \operatorname{Log} P(A,\delta,f)+\xi+|B|^{-1} \operatorname{Log} 2. \tag{5}$$

Puisque $H_\mu(A^B/D) \leqq \xi$, pour un élément g de $F$ on a $H_\mu(g^{-1} A^B/g^{-1} D) \leqq \xi$, donc $H_\mu(A^A/C)=H(\bigvee_{g\in F} g^{-1} A^B/\bigvee_{g\in F} g^{-1} D) \leqq \xi\cdot|F|$. D'où $H_\mu(A^A) \leqq H_\mu(C)+\xi\cdot|F|$ et (5) donne alors

$$|A|^{-1} H_\mu(A^A)+\mu(f) \leqq |A|^{-1} \operatorname{Log} P(A,\delta,f)+2\xi+|B|^{-1} \operatorname{Log} 2. \tag{6}$$

D'après le lemme de la première partie, les parties finies de $G$ exactement recouvertes par des translatés disjoints de $B$ sont arbitrairement moyennantes et on note $\mathfrak{M}_B$ le filtre obtenu. En passant à la limite suivant ce filtre dans (6), il vient:

$$\begin{aligned} h(A,\mu)+\mu(f) &\leqq \limsup_{\mathfrak{M}_B} |A|^{-1} \operatorname{Log} P(A,\delta,f)+2\xi+|B|^{-1} \operatorname{Log} 2 \\ &\leqq \limsup_{\mathfrak{M}} |A|^{-1} \operatorname{Log} P(A,\delta,f)+2\xi+|B|^{-1} \operatorname{Log} 2 \\ &= P(\delta,f)+2\xi+|B|^{-1} \operatorname{Log} 2. \end{aligned}$$

D'où pour toute partition finie $A$:

$$h(A,\mu)+\mu(f) \leqq P(f)+2\xi+|B|^{-1} \operatorname{Log} 2.$$

S'il existe des pavés de cardinal arbitrairement grand et comme $\xi$ est arbitraire:

$$h(A,\mu)+\mu(f) \leqq P(f) \qquad \text{d'où } h(\mu)+\mu(f) \leqq P(f).$$

On montre ensuite l'inégalité $\sup\{h(\mu)+\mu(f), \mu\in\mathcal{M}^1(X,G)\} \geqq P(f)$. La démonstration utilise la pavabilité de $G$ au sens suivant: les pavés au sens fort sont arbitrairement moyennants. Pour démontrer le résultat on établit la proposition suivante:

**Proposition.** *Pour tout entourage symétrique $\delta$ de $X$, il existe une probabilité $\mu$ invariante par $G$ vérifiant $h(\mu)+\mu(f) \geqq P(\delta,f)$.*

*Démonstration.* Construction d'une probabilité $\mu$ de $\mathcal{M}^1(X,G)$. Soit $A$ une partie finie de $G$ et $E_A$ un ensemble $(A,\delta)$-séparé tel que $p(f_A,E_A) \geqq P(A,\delta,f)-1$. On considère la probabilité $\sigma_A$ de support $E_A$ définie par $\sigma_A(\{y\})=\exp[f_A(y)-p(f_A,E_A)]$ pour $y$ dans $E$. Posons $\mu_A=|A|^{-1} \sum_{k\in A} k(\sigma_A)$.

Il est clair qu'il existe une suite $A_n$ de parties finies de $G$ vérifiant

a) $A_n$ est une suite moyennante.

b) $\lim_{n\to\infty} |A_n|^{-1} P(A_n,\delta,f)=P(\delta,f)$.

c) $\mu_{A_n}$ converge faiblement vers une probabilité $\mu$. D'après a) limite $\mu$ est dans $\mathcal{M}^1(X,G)$.

Soit $A$ une partition borélienne finie de $X$ telle que $a\times a\subset\delta$ pour tout $a$ de $A$. On a $a\times a\subset\delta_A$ pour tout $a$ de $A^A$ donc $|E_A\cap a| \leqq 1$. Il vient alors

$$H_{\sigma_\Lambda}(A^\Lambda)+\sigma_\Lambda(f_\Lambda)=\sum_{y\in E}\sigma_\Lambda(\{y\})\,[f_\Lambda(y)-\operatorname{Log}\sigma_\Lambda(\{y\})]=p(f_\Lambda,E_\Lambda).$$

Soit $B$ un pavé au sens fort: il existe $R_i$, $i=1,\dots,k$ avec $k=|B|$, partition de $G$ avec $B\circ R_i=G$. On suppose que l'élément neutre de $G$ est dans $B$.

Soit $\Lambda$ une partie finie de $G$ et $i$ fixé. Soit $F_i$ le sous-ensemble de $R_i$ des $r$ tels que $Br\subset\Lambda$. On a $\Lambda=B\circ F_i\cup\Lambda_i'$ avec

$$\Lambda_i'\cap B\circ F_i=\emptyset,\qquad |\Lambda_i'|\leqq|\{x\in\Lambda,\exists\, b\in BB^{-1}, bx\notin\Lambda\}|=m_{BB^{-1}}(\Lambda).$$

Si $\Lambda\in M(BB^{-1},\eta)$ alors pour tout $i$: $|\Lambda_i'|<\eta\,|\Lambda|$. Les $F_i$ contenus dans les $R_i$ sont disjoints et contenus dans puisque $B$ contient l'élément neutre. $\bigcup_{i=1}^{k}F_i=\{r,Br\subset\Lambda\}$ donc $\left|\bigcup_{i=1}^{k}F_i\right|\geqq(1-\eta)\,|\Lambda|$ puisque si $\Lambda\in M(BB^{-1},\eta)$ alors $\Lambda\in M(B,\eta)$.

Puisque $A^\Lambda=\bigvee_{r\in F_i}(A^B)^r\vee A^{\Lambda_i'}$ par sous-additivité de l'entropie, pour tout $i$,

$$H_{\sigma_\Lambda}(A^\Lambda)+\sigma_\Lambda(f_\Lambda)\leqq\sigma_\Lambda(f_\Lambda)+\sum_{r\in F_i}H_{\sigma_\Lambda}((A^B)^r)+|\Lambda_i'|\cdot\operatorname{Log}|A|.$$

En ajoutant toutes ces inégalités pour $i=1,\dots,k$, il vient

$$\begin{aligned}|B|\cdot p(f_\Lambda,E_\Lambda)&\leqq|B|\cdot\sigma_\Lambda(f_\Lambda)+\sum_i|\Lambda_i'|\cdot\operatorname{Log}|A|+\sum_{r\in\bigcup F_i}H_{\sigma_\Lambda}((A^B)^r)\\&\leqq|B|\cdot\sigma_\Lambda(f_\Lambda)+\eta\cdot|\Lambda|\cdot|B|\cdot\operatorname{Log}|A|+\sum_{r\in\Lambda}H_{\sigma_\Lambda}((A^B)^r),\end{aligned}$$

pour $\Lambda\in M(BB^{-1},\eta)$, ce qui a lieu à partir d'un certain rang dans la suite $\Lambda_n$. On remarque que $\sigma_\Lambda(f_\Lambda)=|\Lambda|\cdot\mu_\Lambda(f)$.

Par concavité de l'entropie:

$$\sum_{r\in\Lambda}H_\mu((A^B)^r)=\sum_{r\in\Lambda}H_{r(\sigma_\Lambda)}(A^B)\leqq|\Lambda|\cdot H_{\mu_\Lambda}(A^B)$$

d'où $|\Lambda|^{-1}\,p(f_\Lambda,E_\Lambda)\leqq\mu_\Lambda(f)+\eta\operatorname{Log}|A|+|B|^{-1}\,H_{\mu_\Lambda}(A^B)$ si $\Lambda\in B(BB^{-1},\eta)$.

On termine alors la démonstration de la même façon que Misiurewicz: si la partition borélienne $A$ est choisie de telle façon que les frontières de ses éléments soient de mesure nulle pour $\mu$, l'entropie de $A^B$ est faiblement continue en $\mu$. On peut alors passer à la limite pour la suite $\Lambda_n$:

$$P(\delta,f)\leqq\mu(f)+|B|^{-1}\,H_\mu(A^B).$$

Puisque les pavés au sens fort sont arbitrairement moyennants dans $G$: $P(\delta,f)\leqq\mu(f)+h(A,\mu)$; ceci termine la démonstration.

## Appendice A

Soit $G$ un groupe dénombrable. On appelle $T$ l'ensemble des ordres totaux sur $G$. C'est un sous-espace fermé de l'espace compact $\{0,1\}^{G\times G-\Delta}$, où $\Delta$ est la diagonale de $G\times G$: en effet, on identifie un ordre total $\tau$ avec une fonction de

$G \times G - \Delta$ dans $\{0,1\}$ de la façon suivante : $x \tau y \Leftrightarrow f(x,y)=1$, et les conditions sur $f$ qui définissent un ordre total sont fermées. La topologie d'espace compact induite sur $T$ peut également être définie par la base de topologie suivante: pour une partie finie $F$ de $G$ et $t$ un ordre total sur $F$, $O(F,t)=\{\tau \in T, \tau/F=t\}$.

Soit $\mathscr{B}$ le groupe des bijections de $G$. $\mathscr{B}$ opère continuement sur $T$ de la manière suivante: soit $\tau \in T$ et $b \in \mathscr{B}$ alors

$$x \cdot b(\tau) \cdot y \Leftrightarrow b^{-1} x \cdot \tau \cdot b^{-1} y.$$

Soit $\mathscr{B}_f$ le sous-groupe de $\mathscr{B}$ engendré par les tranpositions de $G$, c'est à dire le groupe des permutations finies de $G$.

**Proposition.** *Il existe une unique probabilité $\pi$ sur $T$* invariante par $\mathscr{B}$.

*Démonstration.* Soit $F$ une partie finie de $G$. Le groupe $\mathscr{S}_F$ des permutations de $F$ permute les ouverts $O(F,t)$; on a donc nécessairement $\pi(O(F,t))=1/|F|!$.

Puisque $O(F,t)=\bigcup_{t'/F=t} O(F \cup a, t')$, $a \notin F$, la relation $\pi(O(F,t))=1/|F|!$ est cohérente, ce qui permet de définir une unique forme linéaire positive de masse 1 sur la sous-algèbre dense de $C(T)$ des fonctions qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées. Donc une unique probabilité (de Radon) invariante par $\mathscr{B}_f$. On vérifie que $\mathscr{B}_f$ est un soùs-groupe distingué de $\mathscr{B}$, donc $\mathscr{B}$ échange les probabilités $\mathscr{B}_f$-invariantes. A cause de son unicité $\pi$ est invariante sous l'action de $\mathscr{B}$.

Soit $f$ une fonction fortement sous-additive, croissante sur $F(G)$ et $x$ un élément de $G$. On pose $f_x(A)=f(A \cup x)-f(A)$. $f_x$ est une fonction positive, décroissante, ce qui permet de définir $f_x$ sur $\mathscr{P}(G)$ par: $f_x(B)=\inf\{f_x(A),\ A$ fini $\subset B\}$. Soit $\tau$ un ordre total sur $G$; on a $f(A)=\sum_{x \in A} f_x(A \cap x_\tau^-)$ où $x_\tau^-$ désigne le passé de $x$ pour l'ordre $\tau$.

En intégrant pour la probabilité $\pi$:

$$|A|^{-1} f(A)=|A|^{-1} \sum_{x \in A} \int d\pi(\tau)\, f_x(A \cap x_\tau^-).$$

Il résulte de sa définition que $f_x$ est décroissante et $f_x(x_\tau^-)$ borélienne sur $T$. $|A|^{-1} f(A) \geqq \int d\pi(\tau) f_x(x_\tau^-)$, cette dernière expression étant indépendante du point $x$.

D'après le théorème de convergence dominée, pour tout $\varepsilon$ positif, il existe $D$ partie finie de $G$ telle que

$$B \supset D \Rightarrow \int d\pi(\tau) f_e(B \cap e_\tau^-) \leqq \int d\pi(\tau) f_e(e_\tau^-)+\varepsilon.$$

On obtient alors

$$|A|^{-1} f(A)=|A|^{-1} \sum_{x \in A} \int d\pi(\tau) f_e(A x^{-1} \cap e_\tau^-),$$

par invariance de $\pi$ et de $f$.

$A x^{-1} \supset D$ est équivalent à $A \supset D x$ et il vient:

$$|A|^{-1} f(A)-\int d\pi(\tau) f_e(e_\tau^-) \leqq \varepsilon+m_D(A) \cdot |A|^{-1} \cdot f_e(\emptyset).$$

D'où la limite selon le filtre moyennant:

$$\lim_{\mathfrak{M}} |A|^{-1} f(A)=\int d\pi(\tau) f_e(e_\tau^-)=\inf\{|A|^{-1} f(A),\ A \in F(G)-\emptyset\}.$$

## Appendice B

On démontre dans cet appendice que la classe des groupes pavables au sens fort est stable par extension.

Soit $G$ un groupe dénombrable, $H$ un sous-groupe distingué de $G$ et $K = G/H$. $\sigma$ un inverse à droite (ensembliste) de la surjection canonique $s$. Soit $c \in F(K)$, $C = \sigma(c)$ et $B \in F(H)$; on dit que $C \cdot B$ est un $\sigma$-rectangle de $G$.

**Lemme.** *Si $H$ et $K$ sont moyennables, les $\sigma$-rectangles sont arbitrairement moyennants.*

*Démonstration.* Soit $D \in F(G)$, $c \in F(K)$, $C = \sigma(c)$, $B \in F(H)$ et $A = C \cdot B$. On peut écrire

$$m_D(A) = |\{x \in A,\ \exists d \in D,\ dx \notin A\}| = |\{x \in A,\ \exists d \in D,\ s(dx) \notin c\}|$$
$$+ |\{x \in A,\ \forall d \in D,\ s(dx) \in c \text{ et } \exists d \in D,\ dx \notin A\}|.$$

Le premier terme de la somme est égal à $|B|\, m_{s(D)}(c)$. Le second est majoré par

$$\sum_{\gamma \in c} |\{x \in B,\ \exists d \in D,\ d\sigma(\gamma)\, x \notin \sigma(s(d)\,\gamma)\, B\}|.$$

D'où

$$m_D(A) \leqq |B|\, m_{s(D)}(c) + \sum_{\gamma \in c} m_{\gamma(D)}(B)$$

où $\gamma(D)$ est la partie de $H$ des éléments de la forme $\sigma(s(d)\,\gamma)^{-1} \cdot d \cdot \sigma(\gamma)$ où $d$ décrit l'ensemble $D$. En choisissant d'abord $c$ dans $K$ dans $M(s(D), \varepsilon/2)$ et ensuite $B$ dans $H$ qui appartienne à tous les $M(\gamma(D), \varepsilon/2)$ le $\sigma$-rectangle $A$ appartient à $M(D, \varepsilon)$.

Pour montrer que la classe des groupes pavables est stable par extension, il suffit de remarquer que si $B$ est un pavé (un pavé fort) de $H$ et $c$ un pavé (un pavé fort) de $K$, le $\sigma$-rectangle $A = C \cdot B$ est un pavé (un pavé fort) de $G$.

## Bibliographie

1. Conze, J.P.: Entropie d'un groupe abélien de transformations. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **25**, 11–30 (1972)
2. Følner, E.: On groups with full Banach mean value. Math. Scand. **3**, 243–254 (1955)
3. Kieffer, J.C.: A generalized Shannon-McMillan theorem for the action of an amenable group on a probability space. Ann. Probability **3** Nb 6, 1031–1037 (1975)
4. Ledrappier, F., Walters, P.: A relativized variational principle for continuous transformations. Preprint 1976
5. Misiurewicz, M.: A short proof of the variational principle for a $\mathbb{Z}^{+n}$ action on a compact space. Astérix **40**, 147–157 (1977)
6. Ornstein, D., Weiss, B.: The Kakutani-Rochlin theorem for solvable groups. Preprint 1976.
7. Walters, P.: A variational for the pressure of continuous transformations. Amer. J. Math. **97**, 937–971 (1976)

Reçu le 15 Février 1977; en forme révisée le 15 Mars 1978 et le 7 Janvier 1979