ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE SUR LES PROCESSUS MARKOVIENS A UNE INFINITE DE PARTICULES

-=-

FONCTIONS THERMODYNAMIQUES LOCALES EN MECANIQUE STATISTIQUE
PRINCIPE VARIATIONNEL

Jean MOULIN OLLAGNIER

Didier PINCHON

Novembre 1976

I - Introduction

Les systèmes infinis de particules ont été introduits, entre autres, pour contribuer à l'étude de la mécanique statistique sur un réseau : c'est le cas en particulier des processus de spin-flip et d'évolutions avec exclusion (voir par exemple LEDRAPPIER (8)).

Nous présentons ici un certain nombre d'outils qui permettent de formuler les problèmes de la manière la plus générale. Nous espérons qu'une semblable analyse permettrá, par exemple, de trouver pour les théorèmes d'existence de ces processus des conditions moins restrictives que celles de LIGGETT (11) ; ces conditions sont bien sûr vérifiées par une classe importante de potentiels ayant unsens physique mais le théorème d'existence ne permet pas de comprendre leur nécessité.

La notion de potentiel régulier que nous utilisons est celle de PRESTON (13) et correspond à celle de cocycle continu.

Jusqu'à présent, différents espaces de Banach ad hoc étaient introduits selon les problèmes à étudier. Des potentiels physiquement intéressants , tels les potentiels de paire, se trouvent vérifier toutes ces conditions.

La régularité du potentiel est par contre une hypothèse suffisante : elle permet de simplifier la démonstration des théorèmes et par là même de comprendre mieux la nature mathématique des résultats.

L'utilisation de groupes d'invariance est formalisée par la notion de B-moyennabilité. Cette notion nous parait la mieux adaptée pour utiliser les idées de KIEFFER (7). On obtient alors la convergence en moyenne de l'entropie indépendamment de toute idée de pavage.

Les résultats obtenus pour l'entropie moyenne possède un analogue pour l'énergie. Nous introduisons différentes énergies locales pour un cocycle continu.

La démonstration du principe variationnel et du fait que les mesures d'équilibre sont les mesures de Gibbs invariantes utilise le gain d'information moyen de FOLLMER (1) en l'adaptant au cadre général.

II - Transformation de Fourier sur $\{0,1\}^S$. Espace des ordres totaux.

1- Soit S un ensemble dénombrable. $X = \{0,1\}^S$ est le groupe compact des applications de S dans Z/2Z (que l'on peut considérer également comme $\mathcal{P}(S)$ muni de la différence symétrique). La mesure de Haar sur X, notée dh, est la mesure produit $(1/2,1/2)^S$.

On note $(\eta_x\ ,\ x \in S)$ la famille des fonctions coordonnées $\eta_x(\xi) = \xi(x)$ pour $\xi \in X$ et on pose : $\forall\, x \in S \qquad \sigma_x = 2\,\eta_x - 1$; ce sont des caractères du groupe X.

Plus généralement si A est une partie finie de S, on pose $\sigma_A = \prod_{x \in A} \sigma_x$ et on vérifie que l'ensemble des (σ_A , A fini $\subset$ S) est le groupe des caractères de X. Ce groupe est isomorphe au groupe des parties finies de S, $\mathcal{F}(S)$, muni de la différence symétrique.

2- Soit C(X) l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs réelles. Soit $f \in C(X)$, on note $\hat{f}(A) = \int f.\sigma_A\, dh$ le coefficient de Fourier correspondant au caractère σ_A.

Proposition II.1.

Soit $f \in C(X)$. L'application $\Lambda \in \mathcal{F}(S) \longrightarrow f^\Lambda = \sum_{A \subset \Lambda} \hat{f}(A)\ \sigma_A$ est uniformément continue de $\mathcal{F}(S)$ dans C(X) et se prolonge donc en une application continue de $\mathcal{P}(S)$ dans C(X) , notée de la même façon.

Pour Λ dans $\mathcal{P}(S)$, f^Λ est une version continue de l'espérance conditionnelle de f pour dh par rapport à la tribu $\mathcal{B}(\Lambda)$ des boréliens de X qui ne dépendent que des coordonnées dans Λ. En particulier $f^S = f$.

Démonstration

Soit $f \in C(X)$; on vérifie que pour Λ fini :

$$f^\Lambda = \sum_{A \subset \Lambda} 1_{(A,\Lambda)} \frac{\int f(\xi)\ 1_{(A,\Lambda)}\ dh(\xi)}{\int 1_{(A,\Lambda)}\ dh(\xi)} \qquad (1)$$

où $\quad 1_{(A,\Lambda)} = \prod_{x\in A} \eta_x \,.\, \prod_{y\in\Lambda - A} (1-\eta_y)$ (indicatrice du cylindre (A,Λ)).

Pour Λ fixé, d'après (1) , l'application $g \longrightarrow g^\Lambda$ est une application linéaire contractante de $C(X)$: $\|g^\Lambda\| \leq |g\|$.

D'autre part, on vérifie que : $\forall\, \Lambda_1, \Lambda_2 \qquad (g^{\Lambda_1})^{\Lambda_2} = g^{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}$.

Puisque f est uniformément continue :

$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists\, B \in \mathcal{F}(S) \,,\ \forall\, \xi, \chi \in X \qquad \xi(x) = \chi(x) \text{ si } x \in B \Rightarrow |f(\xi) - f(\chi)| < \varepsilon$

Donc si $\Lambda \supset B$, $\|f^\Lambda - f\| < \varepsilon$.

Considérons alors l'entourage $U_B = \{(\Lambda_1, \Lambda_2) \,,\ \Lambda_1 \cap B = \Lambda_2 \cap B\}$

Si $(\Lambda_1, \Lambda_2) \in U_B$ alors $f^{\Lambda_1} - f^{\Lambda_2} = (f^{\Lambda_1 \cup B} - f^{\Lambda_2 \cup B})^{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}$

D'où : $\|f^{\Lambda_1} - f^{\Lambda_2}\| < \|f^{\Lambda_1 \cup B} - f^{\Lambda_2 \cup B}\| < \|f^{\Lambda_1 \cup B} - f\| + \|f - f^{\Lambda_2 \cup B}\| < 2\varepsilon$

ce qui prouve l'uniforme continuité de l'application $\Lambda \longrightarrow f^\Lambda$, $\Lambda \in \mathcal{F}(S)$

et donc permet le prolongement.

On vérifie alors que les coefficients de Fourier de f sont donnés par :

$$\hat{f}^\Lambda(A) = \hat{f}(A) \quad \text{pour } A \text{ fini} \subset \Lambda \,,\quad \hat{f}^\Lambda(A) = 0 \quad \text{sinon}$$

ce qui suffit pour montrer que f^Λ est l'espérance conditionnelle de f par rapport à $\mathcal{B}(\Lambda)$.

3- Cocycles

Soit $x \in S$; on appelle τ_x l'homéomorphisme de X défini par :

$$\eta_y(\tau_x \xi) = \eta_y(\xi) \quad \text{si } y \neq x \quad \text{et} \quad \eta_x(\tau_x \xi) = 1 - \eta_x(\xi)$$

(renversement de la coordonnée en x)

Définition (cf.(9))

On dit qu'une famille $(V_x \,,\ x \in S)$ de $C(X)$ vérifie les relations de cocycle si :

$$\forall\, x \in S \,,\quad V_x + V_x \circ \tau_x = 0$$

$$\forall\, x, y \in S \,,\quad V_x + V_y \circ \tau_x = V_y + V_x \circ \tau_y$$

Proposition II.2.

Il existe une famille de coefficients $J(A)$, $A \in \mathcal{F}(S)$ telle que :

$$\forall\, x \in S\ ,\quad \hat{V}_x(A) = -2J(A) \text{ si } x \in A \text{ et } \hat{V}_x(A) = 0 \text{ si } x \notin A$$

Démonstration

Les relations de cocycle pour $(V_x\ ,\ x \in S)$ se traduisent par :

$$\forall\, A \in \mathcal{F}(S) \qquad \hat{V}_x(A) + (-1)^{|A \cap x|}\hat{V}_x(A) = 0$$

$$\hat{V}_x(A) + (-1)^{|A \cap x|}\,\hat{V}_y(A) = \hat{V}_y(A) + (-1)^{|A \cap y|}\,\hat{V}_x(A)$$

De la première on déduit que si $x \notin A$, $\hat{V}_x(A) = 0$ et de la seconde si x et $y \in A$, $\hat{V}_x(A) = \hat{V}_y(A)$ d'où le résultat.

Dans toute la suite on posera $J(\emptyset) = 0$.

4- Ordres totaux de S

Soit T l'ensemble des ordres totaux de S. C'est un sous-espace fermé de l'espace compact $\{0,1\}^{S\times S - \Delta}$ où Δ est la diagonale de $S \times S$: en effet on identifie un ordre total $<$ avec une fonction f de $S\times S - \Delta$ dans $\{0,1\}$ de la façon suivante :

$$x < y \iff f(x,y) = 1$$

et les conditions sur f qui définissent un ordre total sont fermées.

La topologie d'espace compact induite sur T peut également être définie par la base de topologie suivante :

$$\forall\, F \text{ fini} \subset S\ ,\ \forall\, t \text{ ordre total sur } F\ ,\quad O(F,t) = \{\tau \in T \ /\ \tau|_F = t\}$$

Soit $\mathcal{B}$ le groupe des bijections de S. $\mathcal{B}$ opère continuement sur T de la manière suivante : soit $\tau \in T$, $b \in \mathcal{B}$ alors :

$$x.b(\tau).y \iff b^{-1}x.\tau.b^{-1}y$$

Soit $\mathcal{B}_f$ le sous-groupe de $\mathcal{B}$ engendré par les transpositions de S, c'est à dire le groupe des permutations finies de S.

Proposition II.3.

Il existe une unique probabilité π sur T invariante par $\mathcal{B}_f$.

Démonstration

Soit F une partie finie de S. Le groupe $\mathcal{S}_F$ des permutations de F permute les ouverts $O(F,t)$; on a donc nécessairement : $\pi(O(F,t)) = \frac{1}{|F|!}$.

Puisque $O(F,t) = \bigcup_{t'|_F = t} O(F \cup a, t') \quad a \notin F$, la relation

$(O(F,t)) = \frac{1}{|F|!}$ est cohérente, cequi permet de définir une unique forme linéaire positive de masse 1 sur la sous-algèbre dense de $C(T)$ des fonctions qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées. donc une unique probabilité (de Radon) invariante par $\mathcal{B}_f$.

Corollaire

π est invariante sous l'action de $\mathcal{B}$.

Démonstration

$\mathcal{B}$ normalise $\mathcal{B}_f$, c'est à dire : $\forall b \in \mathcal{B}, \forall p \in \mathcal{B}_f$, $bpb^{-1} \in \mathcal{B}_f$.

$\forall b \in \mathcal{B}$, $\forall p \in \mathcal{B}_f$, $b(\pi)(f) = \pi(f \circ b^{-1}) = \pi(f \circ b^{-1} \circ p \circ b \circ b^{-1}) = b(\pi)(f \circ b^{-1} \circ p \circ b)$

Donc $b(\pi)$ est $\mathcal{B}_f$-invariante et $b(\pi) = \pi$.

5- Soit $x \in S$. On considère l'application $\tau \to x_\tau^-$ de T dans $\mathcal{P}(S-x)$ définie par $x_\tau^- = \{ y \in S-x \ , \ y.\tau.x \}$ (passé strict de x pour τ)

Cette application est continue et nous appelons ν_x l'image de la probabilité π par cette application.

Proposition II.4.

On a : $\nu_x = \int_0^1 \nu_\lambda \, d\lambda$ où ν_λ est la mesure produit $(\lambda, 1-\lambda)^{S-x}$ sur $\mathcal{P}(S-x)$ et $d\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Démonstration

Soit $\Lambda \subset S-x$ et $A \subset \Lambda$.

On calcule : $\nu_x(A,\Lambda) = \pi(\{\tau \in T \;/\; x^-_\tau \in (A,\Lambda)\}) = \sum_{x^-_t = A} \pi(O(\Lambda \cup x, t))$

$$= \frac{|A|\,!\,|(\Lambda - A)|!}{(|\Lambda| + 1)!} .$$

On vérifie que $\nu_x(A_{yz}, \Lambda_{yz}) = \nu_x(A,\Lambda) \quad \forall\, y,z \in S-x \quad$ où $A_{yz} = \tau_{yz}(A)$ et τ_{yz} est la transposition échangeant y et z.

Donc ν_x est une probabilité échangeable.

D'après le théorème de De Finetti (4), ν_x est de la forme $\int \nu_\lambda \, d\mu(\lambda)$ où μ est une probabilité sur $[0,1]$ et ν_λ la mesure produit $(\lambda, 1-\lambda)^{S-x}$.

$$\nu_x(A,\Lambda) = \frac{|A|\,!\,|(\Lambda - A)|!}{(|\Lambda| + 1)!} = \int_0^1 d\mu(\lambda)\, \lambda^{|A|} (1-\lambda)^{|\Lambda - A|} .$$

Donc μ vérifie $\quad \forall\, n,m \geqslant 0 \;, \quad \int_0^1 d\mu(\lambda)\lambda^n (1-\lambda)^m = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$

C'est alors un exercice facile de montrer que seule la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ vérifie ces relations.

Soit $x \in S$ et $b \in \mathcal{B}$. b induit un homéomorphisme de $\mathcal{P}(S-x)$ sur $\mathcal{P}(S-b(x))$ et on vérifie immédiatement que $\nu_{b(x)} = b(\nu_x)$.

6- B-moyennabilité

Soit B un groupe de bijections de S et de façon naturelle un groupe d'homéomorphismes de X.

Une hypothèse sur l'action de B sur S sera toujours faite dans la suite :

B agit de façon transitive sur S.

Il existe une suite Λ_n de partie finies de S vérifiant :

$$\forall\, x_0 \in S \;, \forall\, F \text{ fini} \subset S \;, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{|\{x \in \Lambda_n, \exists\, b \in B, b(x_0) = x \;,\; bF \subset \Lambda_n\}|}{|\Lambda_n|} = 1$$

S est alors dit B-moyennable et Λ_n est appelée suite B-moyennante.

Exemples

- $S = Z^d$, $B = Z^d$; une suite B-moyennante est alors une suite de parties de S qui tend vers l'infini au sens de Van Hove (voir (14) ch.2)

- Sans entrer dans une analyse très détaillée disons que la plupart des réseaux réguliers dans R^n avec leur groupe d'isométries sont B-moyennables. Et que les arbres ne le sont pas.

On dit qu'une famille $(f_x \, , \, x \in S)$ de $C(X)$ est B-cohérente si :

$$\forall\, x \in S \, , \, \forall\, b \in B \, , \quad f_x \circ b^{-1} = f_{b(x)} \quad .$$

III - Entropie

L'utilisation des ordres totaux pour démontrer la convergence de l'entropie moyenne est une idée dûe à KIEFFER (7).

Soit A une partie finie de S , μ une probabilité sur X ; on appelle entropie de la partie A le nombre $H_\mu(A) = -\sum_{B\subset A} \mu(B,A) \operatorname{Log} \mu(B,A)$.

$H_\mu(A)$ est une fonction croissante de A (concavité de la fonction $-x \operatorname{Log} x$).

On appelle entropie conditionnelle d'une partie A par rapport à une partie C finie : $H_\mu(A/C) = H_\mu(A\cup C) - H_\mu(C) = \sum_{D\subset C} \mu(D,C)\, H_{\mu_D}(A)$

où $\mu_D(B,A) = \dfrac{\mu((B,A)\cap(D,C))}{\mu(D,C)}$ (μ_D est la probabilité conditionnelle sachant que l'on a D dans C).

L'entropie conditionnelle est fonction décroissante du conditionnement :

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \quad\Rightarrow\quad H(A/\Lambda_1) \geqslant H(A/\Lambda_2)$$

Par passage à la limite décroissante, on peut donc définir l'entropie conditionnelle par rapport à une partie quelconque. (voir par exemple (15) ch.4).

Théorème III.1.

Soit μ une probabilité B-invariante sur X , Λ_n une suite B-moyennante et $x \in S$, alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} |\Lambda_n|^{-1} H_\mu(\Lambda_n) = \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\, H_\mu(x/\Lambda)$$

Démonstration

Soit τ un ordre total ; on calcule :

$$H_\mu(\Lambda_n) = \sum_{y\in\Lambda_n} H_\mu(y/\Lambda_n \cap y_\tau^-) \qquad \text{où} \quad y_\tau^- = \{ z\in S \;/\; z.\tau.y \;,\; z\neq y\}$$

$$\text{D'où : } |\Lambda_n|^{-1} H_\mu(\Lambda_n) = |\Lambda_n|^{-1} \sum_{y\in\Lambda_n} \int_T d\pi(\tau)\, H_\mu(y/\Lambda_n\cap y_\tau^-)$$

$$= |\Lambda_n|^{-1} \sum_{y\in\Lambda_n} \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_y(\Lambda)\, H_\mu(y/\Lambda_n\cap\Lambda)$$

D'autre part :

$$\int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\, H_\mu(x/\Lambda) = \lim_{M \to S-x} \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\, H(x/\Lambda \cap M)$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, c'est à dire :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M_o$ avec $M \supset M_o \Rightarrow$

$$\left| \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\, H(x/\Lambda) - \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\, H(x/\Lambda \cap M) \right| < \varepsilon$$

Puisque la suite Λ_n est B-moyennante , il existe n_o :

$$n \geqslant n_o \Rightarrow \left| \{ y \in \Lambda_n , \exists b \in B , b(x) = y , bM_o \subset \Lambda_n \} \right| > (1-\varepsilon) |\Lambda_n|$$

Notons Λ_n' l'ensemble qui est dans le terme de gauche de l'inégalité.

On a :

$$|\Lambda_n|^{-1} H_\mu(\Lambda_n) = |\Lambda_n|^{-1} \sum_{y \in \Lambda_n'} \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\, H_\mu(x/\, b^{-1}(\Lambda_n) \cap \Lambda)$$

$+ |\Lambda_n|^{-1} \sum_{y \in \Lambda_n - \Lambda_n'}$ ---- car est B-invariante donc :

$H_\mu(x/\, b^{-1}(\Lambda_n) \cap \Lambda) = H_\mu(b(x)/\Lambda_n \cap b\Lambda)$ et $b(\nu_x) = \nu_y$ (voir II.5.)

Puisque $b^{-1}(\Lambda_n) \supset M_o$ (définition de Λ_n') on a :

$$\left| \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\, H_\mu(x/\Lambda) - \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\, H_\mu(x/\Lambda \cap b^{-1}(\Lambda_n)) \right| < \varepsilon$$

D'autre part : $H_\mu(x/\Lambda) \leqslant H_\mu(x) \leqslant \text{Log } 2$ d'où :

$$\left| |\Lambda_n|^{-1} H_\mu(\Lambda_n) - \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\, H_\mu(x/\Lambda) \right| < \varepsilon + 2\varepsilon \text{ Log } 2 .$$

On appelle entropie d'une mesure B-invariante cette limite , indépendante de la suite B-moyennante choisie, et on la note $h(\mu)$.

La probabilité π sur les ordres totaux de S et donc les mesures $(\nu_x,\ x \in S)$ sont définies indépendamment du groupe B .

Il est donc possible pour une probabilité μ sur X de définir la famille des nombres $h_x(\mu) = \int_{(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\, H_\mu(x/\Lambda)$, $x \in S$.

On les appelle entropies locales de μ .

IV - Energies locales

1. Soit S un ensemble dénombrable B-moyennable et $X = \{0,1\}^S$.

Soit $(V_x\ ,\ x \in S)$ une famille B-cohérente de fonctions de $C(X)$ $(\ \forall x \in S\ , \forall b \in B\ ,\ V_{b(x)} = V_x \circ b^{-1}\ )$ vérifiant les relations de cocycle.

$(\ J(A)\ ,\ A \text{ fini} \subset S\ )$ les coefficients apparaissant dans la décomposition de Fourier des V_x (Proposition II.2.).

On appelle énergie de la partie finie Λ, la fonction de $C(X)$:

$$U_\Lambda = \sum_{A \subset \Lambda} J(A)\, \sigma_A\ .$$

Théorème IV.1.

Il existe une famille de fonctions continues $(\varphi_x\ ,\ x \in S)$ B-cohérente telle que :

a) les coefficients de Fourier de φ_x sont donnés par :

$$\hat{\varphi}_x(A) = \frac{J(A)}{|A|} \quad \text{si } x \in A \ ; \quad = 0 \quad \text{si } x \notin A$$

b) Pour toute probabilité B-invariante μ et toute suite Λ_n B-moyennante :

$$\lim_{n \to \infty} |\Lambda_n|^{-1} \mu(U_{\Lambda_n}) = \mu(\varphi_x)$$

Remarque Ce théorème est entièrement analogue au théorème III.1.
On note $U(\mu)$ la limite obtenue dans le b).

Démonstration

a) Existence de la famille $(\varphi_x\ ,\ x \in S)$

Soit $x \in S$; la fonction V_x de $C(X)$ permet de définir une application continue de $\mathcal{P}(S-x)$ dans $C(X)$ par : $\Lambda \longrightarrow V_x^{\Lambda \cup x}$ (Proposition II.1.)
La famille des $(\ V_x^{\Lambda \cup x}\ ,\ \Lambda \in \mathcal{P}(S-x)\ )$ est une famille équicontinue.
Si ν_x désigne la probabilité sur $\mathcal{P}(S-x)$ introduite dans le paragraphe II.5., posons :

$$\varphi_x = -\frac{1}{2} \int V_x^{\Lambda \cup x}\, d\nu_x(\Lambda)\ .$$

On a : $\varphi_x \in C(X)$.

Montrons que les $(\varphi_x\ ,\ x \in S)$ répondent au problème :

$$\int_X \varphi_x(\xi)\,\sigma_A(\xi)\,dh(\xi) = -\frac{1}{2}\int_X \int_{\mathcal{P}(S-x)} V_x^{\Lambda\cup x}(\xi)\,\sigma_A(\xi)\,d\nu_x(\Lambda)\,dh(\xi)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda)\int_X V_x^{\Lambda\cup x}(\xi)\,\sigma_A(\xi)\,dh(\xi)$$

Or $\displaystyle\int_X V_x^{\Lambda\cup x}(\xi)\,\sigma_A(\xi)\,dh(\xi) = \hat{V}_x(A)$ si $A \subset \Lambda\cup x$

$= 0$ sinon

D'où $\hat{\varphi}_x(A) = -\frac{1}{2}\hat{V}_x(A).\ \nu_x(A-x,A-x) = -\frac{1}{2}|A|^{-1}\,\hat{V}_x(A)$

puisque : $\nu_x(A-x,A-x) = |A|^{-1}$.

Du fait de la B-cohérence des $(V_x\ ,\ x \in S)$ et des $(\nu_x\ ,\ x \in S)$, la famille $(\varphi_x\ ,\ x \in S)$ est B-cohérente.

b) La seconde partie du théorème résulte de ce que :

$$|\Lambda_n|^{-1}\left[U_{\Lambda_n} - \sum_{x\in\Lambda_n}\varphi_x\right] \text{ converge uniformément vers } 0 .$$

On remarque : $\displaystyle U_\Lambda = \sum_{x\in\Lambda}\Big(\sum_{\substack{A\ni x\\ A\subset\Lambda}}\frac{J(A)}{A}\,\sigma_A\Big)$; soit x_o fixé ,

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\Lambda_o\ ,\ \forall\Lambda\supset\Lambda_o,\ \|\varphi_{x_o} - \varphi_{x_o}^{\Lambda}\| < \varepsilon \quad \text{(Proposition II.1.)}$$

Utilisant la B-moyennabilité de la suite Λ_n :

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists n_o\ ,\ n\geqslant n_o \Rightarrow \frac{|x\in\Lambda_n, \exists b\in B\ ,\ b(x_o) = x\ ,\ b\Lambda_o\subset\Lambda_n|}{|\Lambda_n|} > (1-\varepsilon)$$

et notons Λ_n' le sous-ensemble de Λ_n du terme de gauche.

$$|\Lambda_n|^{-1}\Big(U_{\Lambda_n} - \sum_{x\in\Lambda_n}\varphi_x\Big) = |\Lambda_n|^{-1}\sum_{x\in\Lambda_n'}(\varphi_x^{\Lambda_n} - \varphi_x) + |\Lambda_n|^{-1}\sum_{x\in\Lambda_n-\Lambda_n'}$$

Or pour $x\in\Lambda_n'$: $\varphi_x^{\Lambda_n} - \varphi_x = \varphi_{b(x_o)}^{b(b^{-1}\Lambda_n)} - \varphi_{b(x_o)} =$

$(\varphi_{x_o}^{b^{-1}\Lambda_n} - \varphi_{x_o})\circ b^{-1}$ et comme $b^{-1}\Lambda_n\supset\Lambda_o$ $\|\varphi_x^{\Lambda_n} - \varphi_x\| < \varepsilon$

$$\text{Donc } \left||\Lambda_n|^{-1}\Big(U_{\Lambda_n} - \sum_{x\in\Lambda_n}\varphi_x\Big)\right| < \frac{|\Lambda_n'|}{|\Lambda_n|}\varepsilon + \frac{|\Lambda_n'-\Lambda_n|}{|\Lambda_n|}2\|\varphi\| < \varepsilon + 2\|\varphi\|\varepsilon .$$

Remarque

Il est possible de montrer , ce qui aurait également permi de définir la famille $(\varphi_x,\ x \in S)$ que :

$$\forall\, x \in S\ ,\quad \varphi_x = -\frac{1}{2}\,\sigma_x\left[\sigma_x . V_x * R\right]$$ où R est la probabilité sur $\mathcal{P}(S)$ définie par $R = 2\int_{1/2}^{1} \nu_\lambda \, d\lambda$ dont la transformée de Fourier est : $\hat{R}(A) = \int \sigma_A \, dR = \frac{1}{|A|+1}$.

Les calculs de vérification sont laissés au lecteur courageux.

Ce résultat sera utile dans la suite.

---

2. Les coefficients K

La fonction U_Λ a été utilisée par HOLLEY (5) pour définir l'énergie libre moyenne. Il est beaucoup plus usuel en mécanique statistique d'introduire d'autres définitions de l'énergie moyenne, par exemple voir RUELLE (14) , PRESTON (13) .

Dans le cadre général adopté jusqu'ici il est également possible de les définir et de montrer, en un certain sens, leur équivalence avec celle du paragraphe précédent.

Soit A une partie finie de S . Les relations de cocycle montrent que la somme : $\sum_{x \in A} V_x(\xi \,\Delta\, x_t^-)$ est indépendante de l'ordre total t sur A.

On la note $V_A(\xi)$.

On appelle E_Λ la fonction : $$E_\Lambda = \sum_{A \subset \Lambda} 1_{(A,\Lambda)}\, V_A(\emptyset)$$

De la façon habituelle on note $V_A(\emptyset) = V(A)$.

Il existe une famille de coefficients ($K(B)$, $B \in \mathcal{F}(S)$) telle que :

$\forall$ A fini $\quad V(A) = \sum_{B \subset A} K(B)$ (K(B) est souvent appelée énergie d'interaction de la partie finie B)

On obtient ces coefficients à partir des $V(A)$ par la formule d'inversion de Moëbius $K(B) = \sum_{C \subset B} (-1)^{|B-C|}\, V(C)$.

Si on pose $\eta_B = \prod_{x \in B} \eta_x$, on obtient :

$$E_\Lambda = \sum_{B \subset \Lambda} K(B) \sum_{B \subset A \subset \Lambda} 1_{(A,\Lambda)} = \sum_{B \subset \Lambda} K(B)\, \eta_B$$

Théorème IV.2.

Il existe une famille de fonctions continues $(\psi_x \,,\, x \in S)$ B-cohérente telle que :

a) $\forall A$ fini , $\forall x \in S$, $\quad \psi_x(A) = \sum_{\substack{B \ni x \\ B \subset A}} \frac{K(B)}{|B|}$

b) Pour toute probabilité μ B-invariante et toute suite Λ_n B-moyennante :

$$\lim_{n \to \infty} |\Lambda_n|^{-1} \mu(E_{\Lambda_n}) = \mu(\psi_x)$$

On note $E(\mu)$ cette limite.

Démonstration

a) Existence de la famille $(\psi_x \,,\, x \in S)$

Considérons la famille $(\, V_x(\Lambda \cap .) \,,\, \Lambda \in \mathcal{P}(S-x)\,)$: c'est une famille équicontinue et donc la fonction $\psi_x = \eta_x . \int_{\mathcal{P}(S-x)} V_x(\Lambda \cap .)\, d\nu_x(\Lambda)$

est une fonction continue.

Calculons $\psi_x(A)$, A fini : $\psi_x(A) = 0$ si $x \notin A$;

si $x \in A$: $\psi_x(A) = \int_{\mathcal{P}(S-x)} V_x(\Lambda \cap A)\, d\nu_x(\Lambda) = \sum_{C \subset A-x} V_x(C)\, \nu_x(C, A-x)$

Or $V_x(C) = V(C \cup x) - V(C) = \sum_{\substack{B \subset C \cup x \\ B \ni x}} K(B)$

$$\psi_x(A) = \sum_{\substack{B \subset A \\ B \ni x}} K(B) \sum_{B-x \subset C \subset A-x} \nu_x(C, A-x) = \sum_{\substack{B \subset A \\ B \ni x}} K(B)\, \nu_x(B-x, B-x)$$

$$= \sum_{\substack{B \subset A \\ B \ni x}} \frac{K(B)}{B} .$$

b) La seconde partie de la démonstration est analogue à celle de la seconde partie du théorème IV.I. et utilise la B-cohérence des $(\psi_x\ ,\ x \in S)$, la B-moyennabilité de S et la propriété suivante :

$$\sum_{\substack{B \subset \Lambda \\ B \ni x_o}} \frac{K(B)}{|B|}\, \eta_B \quad \text{tend uniformément vers } \psi_{x_o} \text{ quand } \Lambda \text{ tend vers S.}$$

On en déduit que : $|\Lambda_n|^{-1} \left(E_{\Lambda_n} - \sum_{x \in \Lambda_n} \psi_x \right)$ tend uniformément vers 0

---

3. Dans ce paragraphe nous montrons l'équivalence des familles d'énergies locales $(\varphi_x\ ,\ x \in S)$ et $(\psi_x\ ,\ x \in S)$ au sens suivant :

__Théorème IV.3.__

Soit Λ_n une suite B-moyennante : $|\Lambda_n|^{-1} \left(E_{\Lambda_n} - U_{\Lambda_n} \right)$ converge uniformément vers une constante a .

On en déduit : pour toute probabilité μ B-invariante $\mu(\psi_x) = (\varphi_x) + a$.

__Démonstration__

Le calcul donne :

$$\forall\ \Lambda \text{ fini }, \quad |\Lambda|^{-1} E_\Lambda = |\Lambda|^{-1} \sum_{A \subset \Lambda} V(A) . \overbrace{\prod_{x \in A} \eta_x . \prod_{y \in \Lambda - A} (1 - \eta_y)}^{1_{(A,\Lambda)}}$$

sachant que $\quad \eta_x = \dfrac{1 + \sigma_x}{2} \qquad 1 - \eta_y = \dfrac{1 - \sigma_y}{2}$

$$|\Lambda|^{-1} E_\Lambda = |\Lambda|^{-1}\ 2^{-|\Lambda|} \sum_{A \subset \Lambda} V(A) \sum_{C \subset \Lambda} (-1)^{|(\Lambda - A) \cap C|} \sigma_C$$

$$= |\Lambda|^{-1}\ 2^{-|\Lambda|} \sum_{C \subset \Lambda} (-1)^{|C|} \sigma_C \sum_{A \subset \Lambda} (-1)^{|A \cap C|} V(A)$$

avec $\ V(A) = \sum_{B \subset A} K(B)\ $ il vient :

$$|\Lambda|^{-1} E_\Lambda = |\Lambda|^{-1}\ 2^{-|\Lambda|} \sum_{C \subset \Lambda} (-1)^{|C|} \sigma_C \sum_{B \subset \Lambda} K(B) \Big(\sum_{B \subset A \subset \Lambda} (-1)^{|A \cap C|} \Big)$$

On montre que $\quad \sum_{B \subset A \subset \Lambda} (-1)^{|A \cap C|} = 0 \quad \text{si } \ C \cap (\Lambda - B) \neq \emptyset$

$$= (-1)^{|C|}\ 2^{|\Lambda - B|} \qquad \text{si } \quad C \subset B$$

D'où : $|\Lambda|^{-1} E_\Lambda = |\Lambda|^{-1} \sum_{C \subset \Lambda} \sigma_C \sum_{C \subset B \subset \Lambda} 2^{-|B|} K(B)$

$$|\Lambda|^{-1} E_\Lambda = \int |\Lambda|^{-1} E_\Lambda dh + |\Lambda|^{-1} \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\substack{C \ni x \\ C \subset \Lambda}} |C|^{-1} \sigma_C \sum_{C \subset B \subset \Lambda} 2^{-|B|} K(B)$$

Calculons $I = \sum_{\substack{C \ni x \\ C \subset \Lambda}} |C|^{-1} \sigma_C \sum_{C \subset B \subset \Lambda} 2^{-|B|} K(B) = \sigma_x . \sum_{\substack{B \ni x \\ B \subset \Lambda}} 2^{-|B|} K(B) \sum_{C \subset B-x} \frac{\sigma_C}{|C|+1}$

Or d'après la remarque du paragraphe 1. $\frac{\sigma_C}{|C|+1} = \sigma_C * R$

et donc $\sum_{C \subset B-x} \frac{\sigma_C}{|C|+1} = \left(\sum_{C \subset B-x} \sigma_C \right) * R$

$$\sum_{C \subset B-x} \sigma_C = \sum_{C \subset B-x} \prod_{y \in C} \sigma_y = \prod_{y \in B-x} (1 + \sigma_y) = 2^{|B|-1} \eta_{B-x}$$

D'où $I = 2^{-1} \sigma_x . \left(\sum_{\substack{B \ni x \\ B \subset \Lambda}} K(B) \eta_{B-x} \right) * R$

Or $\sum_{\substack{B \ni x \\ B \subset \Lambda_n}} K(B) \eta_{B-x}$ converge uniformément vers $- \sigma_x . V_x$

Donc I converge uniformément vers $-2^{-1} \sigma_x (\sigma_x V_x * R) = \varphi_x$

Si Λ_n désigne une suite B-moyennante $|\Lambda_n|^{-1} (E_{\Lambda_n} - U_{\Lambda_n})$ converge uniformément vers $a = \int \psi_x \, dh$.

---

4. Energies locales

Les résultats que nous avons obtenus dans les paragraphe précédents conduisent à poser la définition suivante :

on appelle énergie locale une famille B-cohérente de fonctions continues $(\theta_x , x \in S)$ telle que : il existe une constante a avec :

$\forall x \in S$, $\forall \mu$ B-invariante , $\mu(\theta_x) = \mu(\varphi_x) + a$ ou ce qui est équivalent : pour toute suite Λ_n B-moyennante $|\Lambda_n|^{-1} \sum_{x \in \Lambda_n} (\theta_x - \varphi_x)$ converge uniformément vers a .

Nous introduisons dans le reste de ce paragraphe d'autres énergies locales non B-cohérentes, correspondant à des conditions extérieures fixées et nous précisons les rapports avec la famille $(\varphi_x \ , x \in S)$.

Soit α un élément de X.

Posons si $x \notin \alpha$ $\quad \psi_x^\alpha = \eta_x \displaystyle\int_{\mathcal{P}(S-x)} V_x\left[(\Lambda \cap .) \cup (\alpha \cap S-\Lambda)\right] \, d\nu_x(\Lambda)$

si $x \in \alpha$ $\quad \psi_x^\alpha = (1-\eta_x) \displaystyle\int_{\mathcal{P}(S-x)} V_x\left[(\Lambda \cap .) \cup (\bar{\alpha} \cap S-\Lambda)\right] d\nu_x(\Lambda)$

où $\bar{\alpha}$ désigne le complémentaire de α .

α est ce qu'on désigne habituellement par "condition extérieure" .

<u>Proposition IV.4.</u>

$\varphi_x = \displaystyle\int \psi_x^\alpha \, dh(\alpha)$ où dh est la mesure de Haar sur $\mathcal{P}(S)$.

<u>Démonstration</u>

$$\int \psi_x^\alpha \, dh(\alpha) = \int_{x \notin \alpha} dh(\alpha) \ \sigma_x(.) \ \psi_x^\alpha(.)$$

$$= \frac{\sigma_x}{2} \int_{\mathcal{P}(S-x)} dh'(\alpha) \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda) V_x\left[(\Lambda \cap .) \cup (\alpha \cap S- \ )\right]$$

où dh' désigne la mesure induite de dh sur $\{\alpha / \ x \notin \alpha\}$: c'est la mesure de Haar sur $\mathcal{P}(S-x)$

$$\int \psi_x^\alpha \, dh(\alpha) = \frac{\sigma_x}{2} \int_{\mathcal{P}(S-x)} d\nu_x(\Lambda) \int_{\mathcal{P}(S-x)} dh'(\alpha) \ V_x\left[(\Lambda \cap .) \cup (\alpha \cap S-\Lambda)\right]$$

Le calcul donne alors $\displaystyle\int_{\mathcal{P}(S-x)} dh'(\alpha) \ V_x\left[(\Lambda \cap .) \cup \alpha \cap S-\Lambda)\right] = V_x^{\Lambda \cup x}(.\cup x - x)$

et $\sigma_x \ V_x^{\Lambda \cup x}(.\cup x - x) = V_x^{\Lambda \cup x}(.)$ d'où le résultat .

Erratum

La démonstration de la réciproque dans le dernier théorème (V.1.b) est fausse. L'allusion au résultat de Follmer est insuffisante pour permettre de conclure dans le cadre général que nous avons adopté. Follmer utilise en effet une méthode de pavage dans Z^d.

Il faut donc supprimer de ces notes les trois dernières lignes de l'introduction, l'affirmation "et réciproquement" du théorème V.1.b et l'argument "fin de la démonstration" page 19 qui prétend l'établir.

Nous ne savons pas montrer que les seules mesures d'équilibre ($H(m/\mu) = 0$) sont les mesures de Gibbs invariantes.

Le meilleur résultat que nous pouvons obtenir dans cette voie oblige à une restriction sur les potentiels du type que nous critiquons dans l'introduction. En effet on peut appliquer le résultat sur la décroissance de l'énergie libre pour les processus de spin-flip mais il faut pour celà imposer au potentiel de satisfaire aux conditions de Liggett.

V - Principe variationnel en mécanique statistique

Pression

Soit $(V_x\ ,\ x \in S)$ une famille B-cohérente vérifiant les relations de cocycle.

Posons : $\quad Z_\Lambda = \sum_{A \subset \Lambda} \exp V(A)$

Lemme

Soit μ une probabilité sur X . $\forall \Lambda \subset S\ ,\quad \mu(|\Lambda|^{-1} E_\Lambda) + |\Lambda|^{-1} H_\mu(\Lambda) \leqslant |\Lambda|^{-1} \operatorname{Log} Z_\Lambda$

Démonstration

D'après l'inégalité de Jensen on a :

$$\mu(E_\Lambda) + H_\mu(\Lambda) = \sum_{A \subset \Lambda} \mu(A,\Lambda)\,(V(A) - \operatorname{Log}\mu(A,\Lambda)) \leqslant$$

$$\operatorname{Log} \sum_{A \subset \Lambda} \mu(A,\Lambda) \frac{\exp(V(A))}{\mu(A,\Lambda)} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Soit Λ_n une suite B-moyennante ; on pose $P = \overline{\lim}\ |\Lambda_n|^{-1} \operatorname{Log} Z_{\Lambda_n}$

Soit G(V) l'ensemble des mesures de Gibbs B-invariantes pour le potentiel $(V_x\ ,\ x \in S)$, c'est à dire :

$$\mu \in G(V) \Leftrightarrow \forall f \in C(X)\ ,\ \forall x \in S\ ,\quad \mu(f \circ \tau_x) = \mu(e^{V_x}.f)$$

et μ B-invariante.

Théorème V.1.

a) Pour toute probabilité μ B-invariante : $\quad E(\mu) + h(\mu) \leqslant P$

b) Si $\mu \in G(V)$ alors $\quad E(\mu) + h(\mu) = P$ ~~et réciproquement~~ .

Démonstration (qui s'inspire de celle de FOLLMER (1).

a) résulte immédiatement du lemme et des théorèmes III.1. et IV.2. qui assure l'existence de $h(\mu)$ et de $E(\mu)$.

b) Soit une probabilité B-invariante

$$I_{\Lambda_n} = |\Lambda_n|^{-1} \operatorname{Log} Z_{\Lambda_n} - \mu(E_{\Lambda_n}{}^{-1}) - |\Lambda_n|^{-1} H_\mu(\Lambda_n) =$$

$$= |\Lambda_n|^{-1} \sum_{A \subset \Lambda_n} \mu(A,\Lambda_n) \operatorname{Log} \frac{\mu(A,\Lambda_n)}{\nu(A,\Lambda_n)} \qquad \text{où} \quad \nu(A,\Lambda_n) = \frac{e^{V(A)}}{\sum_{B \subset \Lambda_n} e^{V(B)}}$$

Soit $\mu \in G(V)$: μ admet les probabilités conditionnelles :

$$\mu_\Lambda^\xi(A,\Lambda) = \frac{\exp V_A(\xi)}{\sum_{B \subset \Lambda} \exp V_B(\xi)} = \frac{1}{\sum_{B \subset \Lambda} \exp V_B(A \Delta \xi)}$$

et on a $\mu = \int_{\mathcal{P}(S-\Lambda)} \mu_\Lambda^\xi \, d\bar{\mu}(\xi)$ où $\bar{\mu}$ désigne la projection de μ sur $\mathcal{P}(S-\Lambda)$

(voir (9) par exemple)

On constate d'autre part que $\nu(A,\Lambda) = \mu_\Lambda^\emptyset(A,\Lambda)$

D'où $\quad I_{\Lambda_n} \leqslant |\Lambda_n|^{-1} \sup_{A \subset \Lambda_n} \operatorname{Log} \int d\bar{\mu}(\xi) \dfrac{\mu_{\Lambda_n}^\xi(A,\Lambda_n)}{\mu_{\Lambda_n}^\emptyset(A,\Lambda_n)}$

$$\leqslant \sup_{A \subset \Lambda_n} \sup_{\xi \in \mathcal{P}(S-\Lambda_n)} |\Lambda_n|^{-1} \operatorname{Log} \frac{\mu_{\Lambda_n}^\xi(A,\Lambda_n)}{\mu_{\Lambda_n}^\emptyset(A,\Lambda_n)}$$

On a $\quad \dfrac{\mu_{\Lambda_n}^\xi(A,\Lambda_n)}{\mu_{\Lambda_n}^\emptyset(A,\Lambda_n)} = \dfrac{\sum_{B \subset \Lambda_n} \exp V_B(A)}{\sum_{B \subset \Lambda_n} \exp V_B(A \Delta \xi)} \leqslant \sup_{B \subset \Lambda_n} \dfrac{\exp V_B(A)}{\exp V_B(A \Delta \xi)}$

D'où $\quad I_{\Lambda_n} \leqslant \sup_{A \subset \Lambda_n} \sup_{\xi \in \mathcal{P}(S-\Lambda_n)} \sup_{B \subset \Lambda_n} |\Lambda_n|^{-1} \left| V_B(A) - V_B(A \Delta \xi) \right|$

Ilvient ensuite :

$$|\Lambda_n|^{-1} \left| V_B(A) - V_B(A \Delta \xi) \right| \leqslant |\Lambda_n|^{-1} \sum_{x \in B} \sup_{C \subset \Lambda_n} \sup_{\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{P}(S-\Lambda_n)} \left| V_x(C \Delta \xi_1) - V_x(C \Delta \xi_2) \right|$$

$$\leqslant |\Lambda_n|^{-1} \sum_{x \in \Lambda_n} ---$$

Cette dernière expression tend vers 0 : de la manière usuelle, on utilise la continuité uniforme d'une fonction V_{x_0} , la B-cohérence des $(V_x,\ x \in S)$ et la B-moyennabilité de la suite Λ_n (voir théorème II.1.)

D'où $\quad \lim_{n \to \infty} I_{\Lambda_n} = 0$.

Corollaire

Ce résultat prouve que $\lim_{n\to\infty} |\Lambda_n|^{-1} \operatorname{Log} Z_{\Lambda_n}$ converge pour toute suite B-moyennante Λ_n , que la limite est indépendante de Λ_n et et égale à $P = E(\mu) + h(\mu)$ pour $\mu \in G(V)$

Corollaire

La proposition précédente montre que pour toute probabilité $\mu \in G(V)$ et toute probabilité m B-invariante :

$$P - E(m) - h(m) = \lim_{n\to\infty} |\Lambda_n|^{-1} \sum_{A \subset \Lambda_n} m(A,\Lambda_n) \operatorname{Log} \frac{m(A,\Lambda_n)}{\mu(A,\Lambda_n)}$$

Cette dernière expression est le gain d'information moyen de m par rapport à une mesure de Gibbs μ quelconque B-invariante, noté $H(m/\mu)$

---

fin de la démonstration

On montre alors de la même façon que FOLLMER (1) que $H(m/\mu) = 0$ si et seulement si m est une mesure de Gibbs B-invariante qui admet les même caractéristiques locales que μ .

Ce qui termine la démonstration du théorème.

VI - Conclusion provisoire

Dans les paragraphe précédents nous avons montré que lorsque l'espace S possède un groupe d'invariance , les fonctions thermodynamiques obtenues comme limites en moyenne peuvent être définies comme des objets locaux.

Or pour un potentiel sur $\{0,1\}^S$, indépendamment de tout groupe d'invariance on peut définir des énergies locales et une famille d'entropies locales applicable à toute probabilité.

Ceci permet d'imaginer qu'il existe l'équivalent local du principe variationnel ; un tel résultat pourrait éventuellement permettre , dans le cadre de modèles évolutifs appropriés , de montrer que seules les mesures de Gibbs sont stationnaires.

Pour l'instant nous n'avons aucun résultat dans cette voie .

C'est par une autre méthode que HOLLEY et STROOCK (6) ont montré que pour les processus de spin-flip sur Z^d , d = 1 et 2 , les seules mesures stationnaires sont de Gibbs.

Bibliographie

(1) FOLLMER H. On entropy and information gain in random fields
Z. Wahr. verw. Geb. 26, 207-217 (1973).

(2) GREENLEAF F.P. Invariant means on topological groups and their applications
Van Nostrand Math. Studies . New York (1969).

(3) GRIFFITHS R.B. and RUELLE D. Strict convexity ("continuity") of the pressure in lattice systems. Comm.Math.Phys. 23, 169-175 (1971).

(4) HEWITT E. and SAVAGE L.J. Symmetric measures on Cartesian products
Trans. Amer. Math. Soc. 80(1955) , 470-501 .

(5) HOLLEY R. Free energy in a markovian model of lattice spin system
Comm. Math. Phys. 23, 87-99 (1971).

(6) HOLLEY R. and STROOCK D. In one and two dimensions, every stationnary measure for a stochastic Ising model is a Gibbs state. preprint.

(7) KIEFFER J.C. A generalized Shannon-McMillan theorem for the action of an amenable group on a probability space The Annals of Proba. Vol.3 n°6, 1031-1037 (1975).

(8) LEDRAPPIER F. Mesure de Gibbs et evolutions . Séminaire sur les processus markovien à une infinité de particules. Ecole Polytechnique. (1975)

(9) MOULIN OLLAGNIER J. et PINCHON D. Mesures de Gibbs et mesures de Gibbs canoniques . Séminaire sur les particules , Ecole Polytechnique. (1976).

(10) ―――――― : Free energy in spin-flip processes is non-increasing.
à paraître.

(11) LIGGETT T.M. Existence theorems for infinite particle systems.
Trans. Amer. Math. Soc. 165(1972) 471-481 .

(12) LANFORD O.E. III Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics . Battelle Seattle 1971. in Lect. Notes in Phys. 20 , 1-107.

(13) PRESTON C.J. Gibbs states on countable sets . Cambridge Univ. Press No 68

(14) RUELLE D. Statistical Mechanics Benjamin, New York 1969 .

(15) WALTERS P. Ergodic theory -Introductory lectures . Lect. Notes 458 (1975).