THÉORIE ERGODIQUE. — *Mesures quasi invariantes à dérivée continue.* Note (*)
de MM. **Jean Moulin Ollagnier** et **Didier Pinchon**, transmise par M. Robert Fortet.

Les théorèmes que présente cette Note étendent au cas d'un groupe commutatif dénombrable les résultats de M. W. Krieger ([1]) sur la caractérisation des cocycles qui sont limites de cobords. Dans le cas particulier où l'action du groupe est uniquement ergodique, les dérivées sont les limites de cobords.

Soit X un espace métrique compact et G un groupe d'homéomorphismes de cet espace. Nous dirons qu'une mesure de Radon μ sur X est quasi invariante sous l'action de G, à dérivée continue s'il existe une application de G dans C (X), V : $g \mapsto V_g$, appelée dérivée de μ, telle que

$$(\forall g \in G), \quad (\forall f \in C(X)), \qquad \mu(f \circ g) = \mu(\exp(V_g) . f)$$

où l'application V est un cocycle, c'est-à-dire vérifie

$$(\forall g \in G), \quad (\forall h \in G), \qquad V_{hg} = V_h + V_g \circ h^{-1}.$$

L'espace vectoriel des cocycles est muni de la topologie de la convergence simple de G dans C (X).

PROPOSITION 1. — *Si* μ *est une mesure de Radon quasi invariante de dérivée* V, *il en est de même de la mesure positive* $|\mu|$.

PROPOSITION 2. — *L'ensemble des dérivées est un fermé.*

On appelle cobord, un cocycle $g \mapsto V_g$, *s'il existe f dans* C (X) *telle que*

$$(\forall g \in G), \quad V_g = f \circ g^{-1} - f.$$

PROPOSITION 3. — *La somme d'un cobord et d'une dérivée est une dérivée.*

THÉORÈME 1. — *Soit* V *un cocycle.*

Si G *est dénombrable et commutatif les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. V *est limite d'une « suite spéciale » de cobords;*
2. V *est limite d'une suite de cobords;*
3. *pour toute probabilité* μ G*-invariante sur* X, *l'homomorphisme* $g \mapsto \mu(V_g)$ *est nul.*

Démonstration. — Soit B_n une suite moyennante de parties finies de G (un théorème dû à Følner en assure l'existence pour tout groupe dénombrable moyennable).

Considérons alors la suite

$$\varphi_n = -(\text{Card } B_n)^{-1} \sum_{g \in B_n} V_g ;$$

la suite des cobords $g \mapsto \varphi_n \circ g^{-1} - \varphi_n$ est appelée « suite spéciale » associée à V.

Il est clair que (1) ⇒ (2) ⇒ (3).

Montrons que (3) $\Rightarrow$ (1).

On a

$$\forall h \in G, \quad \varphi_n \circ h^{-1} - \varphi_n = (\operatorname{Card} B_n)^{-1} \sum_{g \in B_n} (V_g - V_g \circ h^{-1})$$

Or pour un groupe commutatif

$$V_g + V_h \circ g^{-1} = V_{gh} = V_{hg} = V_h + V_g \circ h^{-1}$$

et donc

$$V_g - V_g \circ h^{-1} = V_h - V_h \circ g^{-1}$$

d'où

$$\forall h \in G, \quad \varphi_n \circ h^{-1} - \varphi_n = V_h - (\operatorname{Card} B_n)^{-1} \sum_{g \in B_n} V_h \circ g^{-1}.$$

Si $\mu(V_h) = 0$ pour toute probabilité μ G-invariante, la suite des moyennes $(\operatorname{Card} B_n)^{-1} \sum_{g \in B_n} V_h \circ g^{-1}$ converge uniformément vers zéro. D'où le résultat.

THÉORÈME 2. — *Si l'action de* G *commutatif est uniquement ergodique, les dérivées sont les limites de cobords.*

Démonstration. — Toute limite de cobords est une dérivée : cela résulte de l'existence d'une mesure G-invariante et des propositions 2 et 3. Réciproquement si le cocycle $g \mapsto V_g$ est une dérivée, il en est de même du cocycle $g \mapsto \lambda(V_g)$ où λ est l'unique probabilité G-invariante; la différence $V_g - \lambda(V_g)$ est en effet une limite de cobords d'après le théorème 1.

Il est clair pour des raisons de masse totale qu'un cocycle $g \mapsto W_g$ où W_g est une fonction constante pour tout g n'est une dérivée que s'il est nul. V est donc une limite de cobords.

Remarque. — La même méthode des suites spéciales permet de montrer que pour un groupe fini tout cocycle est un cobord, pour un groupe localement fini est limite de cobords.

Voici un contre-exemple qui montre que le résultat du théorème 2 ne s'étend pas aux groupes résolubles.

Considérons le groupe compact $X = \{0,1\}^{Z}$ identifié de la façon habituelle à $\mathscr{P}(Z)$, Δ. Les parties finies forment un sous-groupe commutatif dénombrable. Soit F le groupe correspondant des translations, homéomorphismes de X. On note S la transformation correspondant à $\{0\}$. On appelle décalage et on note T l'homéomorphisme de X correspondant à la translation de Z, $t : n \to n+1$. Le groupe $\{T^n, n \in Z\}$ normalise F et on note $G = F.\{T^n, n \in Z\}$. L'action de G sur X est uniquement ergodique. G est engendré par S et T qui vérifient les relations $S^2 = \mathrm{Id}$ et $\forall n \in N$, $(T^n S T^{-n}) S = S (T^n S T^{-n})$.

PROPOSITION 4. — *Lorsqu'un groupe d'homéomorphismes est défini par générateurs et relations la donnée d'un cocycle est équivalente à la donnée de valeurs cohérentes sur les générateurs.*

Soit a un nombre réel et $d \in C(X)$ défini par $d(f) = f(0)$.

La donnée de $V_T = d + a$ et $V_S = 0$ définit un cocycle.

Il suffit de vérifier

$$\forall n \in N, \quad V_{T^n} + V_{T^{-n}} \circ S \circ T^{-n} = V_{T^n} \circ S + V_{T^{-n}} \circ S \circ T^{-n} \circ S.$$

Or

$$V_{T^n} = \sum_{i=0}^{n-1} V_T \circ T^{-i} \quad \text{et} \quad V_{T^{-n}} = -\sum_{i=1}^{n} V_T \circ T^i,$$

$$V_{T^n}(f) = na + \sum_{i=0}^{n-1} d(T^{-i}f) = na + \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \quad \text{et} \quad V_{T^{-n}}(g) = -na - \sum_{i=1}^{n} g(-i).$$

D'où

$$V_{T^{-n}} \circ S \circ T^{-n}(f) = -na - \sum_{i=1}^{n} S(f \circ t^n)(-i) = -na - \sum_{i=1}^{n} f(n-i).$$

Donc le premier membre est nul. De même pour le second.

PROPOSITION 5. — *La restriction à* F *de ce cocycle est une dérivée et il existe une seule probabilité quasi invariante* ν *indépendante de a égale à* $\bigotimes_{i=-\infty}^{+\infty} \nu_i$, ν_i *étant la probabilité sur* $\{0,1\}$ *définie par* $\nu_i(\{0\}) = 1/1+e$ *si* $i < 0$ *et* $\nu_i(\{0\}) = 1/2$ *si* $i \geqq 0$.

Démonstration. — On note $S_n = T^n S T^{-n}$: c'est la translation de X correspondant à la partie $\{n\}$; $\{S_n, n \in Z\}$ engendre F. On vérifie : $V_{S_n} = 0$ si $n \geqq 0$ et $V_{S_n}(f) = 1-2f(n)$ si $n < 0$.

Les probabilités quasi-invariantes pour ce cocycle sont les mesures de Gibbs correspondant au potentiel régulier $V(A) = \text{Card}(A \cap \{n < 0\})$, A fini dans Z [2]. La probabilité conditionnelle pour un cylindre ne dépend pas des conditions extérieures; c'est d'autre part, une probabilité produit. Donc l'unique probabilité de Gibbs pour V est une probabilité produit $\nu = \bigoplus_{i=-\infty}^{+\infty} \nu_i$ où ν_i est quasi invariante pour la transformation S_i avec la dérivée : $1-2d_i$ si $i < 0$, $d_i = d \circ T^{-i}$ et si $i \geqq 0$. D'où $\nu_i(\{0\}) = 1/1+e$ si $i < 0$ et $\nu_i(\{0\}) = 1/2$ si $i \geqq 0$.

PROPOSITION 6. — ν *est* G-*quasi invariante si et seulement si* $a = \text{Log}(2/1+e)$. *Il suffit de vérifier* $\nu(\varphi \circ T) = \nu(\varphi . e^{d+a})$ *pour* φ *ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées.*

Conclusion. — On remarque que $\lambda(V_T) = \lambda(a+d) = \text{Log}(2/1+e)+1/2 \neq 0$ où λ est la mesure de Haar sur X, unique probabilité G-invariante.

(*) Séance du 3 mai 1976.

(1) W. KRIEGER, *Inventiones math.*, 14, 1971, p. 184-196.

(2) J. MOULIN OLLAGNIER et D. PINCHON, *Mesures de Gibbs et mesures de Gibbs canoniques* (*Séminaire sur les processus à une infinité de particules*, École polytechnique, 1976).

J. M. O. :

Département de Mathématiques,
Centre scientifique et Polytechnique,
Université Paris-Nord,
avenue J.-B. Clément,
93430 *Villetaneuse;*

D. P. :

Université de Paris VI,
Laboratoire de Calcul des Probabilités,
Tour 56,
4, *place Jussieu,*
75230 *Paris Cedex* 05.