ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE SUR LES PROCESSUS MARKOVIENS A UNE INFINITE DE PARTICULES

MESURES DE GIBBS ET MESURES DE GIBBS CANONIQUES

Jean MOULIN OLLAGNIER

Didier PINCHON

Janvier 1976

Introduction

- Le problème général de l'équivalence des "ensembles" de la mécanique statistique, tel qu'il est formulé par Ruelle (9), trouve une réponse satisfaisante dans le théorème suivant:

  Les mesures de Gibbs canoniques extrémales pour un potentiel V sont les mesures de Gibbs pour la famille des potentiels $V + \lambda V_o$, où $\lambda \in [-\infty,+\infty]$ est un potentiel chimique.

- Les mesures de Gibbs canoniques apparaissent comme mesures stationnaires réversibles pour des processus d'exclusion avec changement de vitesse.

  L'utilisation des systèmes infinis de particules permet de démontrer plus rapidement le théorème que les méthodes de la mécanique statistique d'équilibre.

- Nous ferons largement appel à la caractérisation des mesures de Gibbs et de Gibbs canoniques comme mesures quasi-invariantes (cf. paragr.2) .

1- Mesures de Gibbs et mesures de Gibbs canoniques

Soit S un ensemble dénombrable. On pose $X = \{0,1\}^S$: muni de la topologie produit, c'est un espace compact métrisable. $\mathcal{F}(S)$ désigne l'ensemble des parties finies de S ; comme sous-ensemble de X, $\mathcal{F}(S)$ est dense.
$\{0,1\}^A$ avec $A \subset S$ est noté X_A .
C(X) est l'ensemble des fonctions continues sur X. F(X) est l'ensemble des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées dans S , dense dans C(X) .

Définition 1

On appelle __interaction__ dans S une fonction $J : \mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $J(\emptyset) = 0$.

Le __potentiel associé à cette interaction__ est également une fonction $V : \mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $V(A) = \sum_{Y \subset A} J(Y)$

On retrouve J à partir de V par la formule d'inversion de Moëbius.

On dit qu'un potentiel V est __continu__ ou __régulier__ si pour tout x de S, la fonction $A \longmapsto V(A \cup \{x\}) - V(A)$ est la restriction à $\mathcal{F}(S)$ d'une fonction continue sur X : cette condition sera toujours supposée vérifiée dans la suite.

Remarquons que dans ce cas il en est de même des fonctions $V(A \cup B) - V(A)$ pour B donné dans $\mathcal{F}(S)$ et on notera sans vergogne $V(A \cup B) - V(A)$ le prolongement à X .

Définition 2

Soit $\Lambda \in \mathcal{F}(S)$, $\eta \in X_{S-\Lambda}$; on définit une mesure m_Λ^η sur X par :

$$m_\Lambda^\eta(A) = e^{V(A \cup \eta) - V(\eta)}$$

On note π_Λ^η la probabilité obtenue en divisant m_Λ^η par sa masse totale.

L'ensemble $(\pi_\Lambda^\eta, \Lambda \in \mathcal{F}(S), \eta \in X_{S-\Lambda})$ est appelé __spécification locale associée à V__ .

Définition 3

On appelle mesure de Gibbs associée au potentiel V une probabilité sur X admettant les probabilités π_Λ^η comme mesures conditionnelles.

Théorème (Preston(8) Proposition 5.2 p 37)

L'ensemble des mesures de Gibbs associées à un potentiel V continu est un convexe compact non vide ; la seule partie non triviale est de montrer qu'il est non vide ; Preston obtient par exemple ce résultat en montrant que les limites faibles de probabilités p_Λ^η construites à partir des π_Λ^η sont des mesures de Gibbs. (Voir également Appendice A).

Définition 4

Soit $\Lambda \in \mathcal{F}(S)$, $\eta \in X_{S-\Lambda}$, $0 \leq N \leq \mathrm{Card}(\Lambda)$; on définit une mesure $m_{\Lambda,N}^\eta$ sur X par :

$$m_{\Lambda,N}^\eta(A) = e^{V(A \cup \eta) - V(\eta)} \quad \text{si CardA} = N$$

$$= 0 \quad \text{sinon .}$$

On note $\pi_{\Lambda,N}^\eta$ la probabilité obtenue en divisant $m_{\Lambda,N}^\eta$ par sa masse totale. La probabilité $\pi_{\Lambda,N}^\eta$ reste la même si on ajoute au potentiel V un potentiel λV_o , dit potentiel chimique , où V_o est défini par $V_o(A) = \mathrm{Card}(A)$, $A \in \mathcal{F}(S)$.

L'ensemble $\left\{ \pi_{\Lambda,N}^\eta \ , \Lambda \in \mathcal{F}(S) \ , \ 0 \leq N \leq \mathrm{Card}(\Lambda) \ , \eta \in X_{S-\Lambda} \right\}$ est appelé spécification locale canonique associée à V .

On appelle potentiel canonique une classe d'équivalence de potentiel pour la relation d'équivalence ci-dessus (voir en particulier Georgii (1)).

Définition 5

On appelle mesures de Gibbs canoniques associée à V une probabilité sur X admettant les probabilités $\pi_{\Lambda,N}^\eta$ comme mesures conditionnelles sur Λ, connaissant le nombre de particules dans Λ . (c'est cette propriété qui justifie l'appellation canonique)

On désigne par G_Λ la tribu engendrée par les ensembles de la forme

$F \cap A$ où F est un borélien de $X_{S-\Lambda}$ et $A = \{\omega / |\omega|_\Lambda = N\}$.

C'est aussi la tribu des boréliens de $X_{S-\Lambda} \times [0, |\Lambda|]$.

μ est une mesure de Gibbs canonique si :

$$\forall f \in C(X_\Lambda) , \qquad E^\mu(f/ G_\Lambda) = \pi^\xi_{\Lambda,N}(f) \qquad (\xi,N)\ \mu\text{-presque sûrement.}$$

Remarque

L'ensemble de telles mesures est un convexe compact non vide car il contient en particulier les mesures de Gibbs associées à tous les potentiels $(V + \lambda V_o \ , \lambda \in \mathbb{R})$ de la classe d'équivalence de V.

Il existe d'autre part deux mesures particulières qui sont canoniques pour tous les potentiels : les masses de Dirac en $\emptyset$ et en S : on peut considérer qu'elle s correspondent aux cas limites $\lambda = -\infty$ et $\lambda = +\infty$.

But de ces exposés : il est de montrer que l'ensemble des mesures extrémales canoniques associées à un potentiel V est la réunion pour $-\infty \leqslant \lambda \leqslant +\infty$ des mesures de Gibbs extrémales pour $V + \lambda V_o$.

- Mesures quasi-invariantes

- Soit $x \in S$ et τ_x la transformation de X dans lui-même définie par : $\tau_x(\eta) = \eta_x$ où η_x est la configuration obtenue à partir de η en changeant la coordonnée en x . τ_x est un homéomorphisme de X .

  On note G le groupe des homéomorphismes de X engendré par les (τ_x , $x \in S$) : ce sont les transformations modifiant un nombre fini de coordonnées.

- Soit τ_{xy} la transformation de X dans lui-même définie par $\tau_{xy}(\eta) = \eta_{xy}$ où η_{xy} est la configuration obtenue à partir de η en permutant les coordonnées en x et y .

  τ_{xy} est un homéomorphisme de X . Restreinte à $\{\eta / \eta(x) = \eta(y)\}$, τ_{xy} est l'identité et à $\{\eta / \eta(x) \neq \eta(y)\}$, $\tau_{xy} = \tau_x \circ \tau_y$.

  On note $\overline{G}$ le groupe des homéomorphismes de X engendré par les τ_{xy} . Une transformation de $\overline{G}$ est une permutation sur un ensemble fini.

- On appelle probabilité quasi-invariante sous l'action d'un groupe H une probabilité μ équivalente à toutes ses transformées sous l'action de H .

  L'application $h \longmapsto \frac{d(h.\mu)}{d\mu} = a_h(.)$ est appelée module de quasi-invariance de μ .

  Des conditions nécessaires pour qu'une fonction $h \longmapsto a_h(.)$ soit un module de quasi-invariance sont :

  $\forall h,k \in H \qquad a_k \circ h^{-1}(.).a_h(.) = a_{hk}(.)$ (relations de compatibilité).

  Si on connait une famille F de générateurs du groupe, il suffit de connaitre les ($a_h(.)$, $h \in F$) : les conditions de compatibilité entre ces fonctions $a_h(.)$ résultent alors des relations entre les générateurs du groupe : en particulier pour un groupe commutatif, les relations de compatibilité sont : $\forall h,k \in F \qquad a_k \circ h^{-1}(.).a_h(.) = a_h \circ k^{-1}(.).a_k(.)$.

Théorème

a) une mesure de Gibbs pour un potentiel V est quasi-invariante sous l'action du groupe G et admet comme module de quasi-invariance la fonction induite par : $\tau_x \longmapsto e^{V(\eta_x) - V(\eta)}$.

b) et réciproquement .

Démonstration

a) Il suffit de vérifier :

$$\forall\ f \in C(X) \qquad \int f(\eta)\, e^{V(\eta_x) - V(\eta)}\, d\mu = \int f(\eta_x)\, d\mu$$

si μ est une mesure de Gibbs et il suffit de le faire si f ne dépend que des coordonnées dans Λ fini.

On peut supposer x dans Λ .

$$\int f(\eta)\, e^{V(\eta_x) - V(\eta)}\, d\mu = \int_{\mathcal{P}(S-\Lambda)} d\bar{\mu}(\xi) \Big[\int_{\mathcal{P}(\Lambda)} f(\xi \cup A)\, e^{V(A_x \cup \xi) - V(A \cup \xi)} d\mu_\Lambda^\xi(A) \Big]$$

$$= \int_{\mathcal{P}(S-\Lambda)} d\bar{\mu}(\xi) \Big[\int_{\mathcal{P}(\Lambda)} f(\xi \cup A)\, e^{[V(A \cup \xi) - V(\xi)] - [V(A_x \cup \xi) - V(\xi)]} d\mu_\Lambda^\xi(A) \Big] \qquad (1)$$

Or $\mu_\Lambda^\xi = \pi_\Lambda^\xi$ $\xi - \bar{\mu}$ presque sufement et π_Λ^ξ est la mesure quasi-invariante pour $(\tau_x\ ,\ x \in \Lambda)$ pour le module de quasi-invariance :

$$\tau_x \longmapsto e^{V_\xi(A_x) - V_\xi(A)} \qquad \text{avec} \quad V_\xi(A) = V(A \cup \xi) - V(\xi) \ .$$

Donc $(1) = \int_{\mathcal{P}(S-\Lambda)} d\bar{\mu}(\xi) \Big[\int_{\mathcal{P}(\Lambda)} f(A_x \cup \xi)\, d\mu_\Lambda^\xi(A) \Big] = \int f(\eta_x)\, d\mu$.

b) Soit μ_Λ^ξ une version régulière de la probabilité conditionnelle de μ par rapport à la tribu des boréliens de $X_{S-\Lambda}$: $\bar{\mu}_{S-\Lambda}$ étant la projection de μ sur $X_{S-\Lambda}$ $\mu = \int \mu_\Lambda^\xi d\bar{\mu}(\xi)$.

Pour montrer que μ est une mesure de Gibbs pour le potentiel V, il suffit de montrer que : $\mu_\Lambda^\xi = \pi_\Lambda^\xi$ pour $\bar{\mu}_{S-\Lambda}$- presque tout ξ .

Soit f une fonstion de la forme $g(\xi)h(A)$ avec $\xi \in X_{S-\Lambda}$, $A \in X_\Lambda$

$$\int f\, d\mu = \int d\bar{\mu}(\xi)\, g(\xi) \int h(A)\, d\mu_\Lambda^\xi(A)$$

La mesure μ étant quasi-invariante on peut écrire :

$$\int d\bar{\mu}(\xi)\, g(\xi) \int h(A_x)\, d\mu_\Lambda^\xi(A) = \int d\bar{\mu}(\xi)\, g(\xi) \int h(A)\, e^{V_\xi(A_x) - V_\xi(A)} d\mu_\Lambda^\xi(A)$$

Ceci est vrai pour toute fonction g de $C(X_{S-\Lambda})$ donc :

$\xi-\bar{\mu}$ presque sûrement : $\int h(A_x)\, d\mu_\Lambda^\xi(A) = \int h(A)\, e^{V_\xi(A_x) - V_\xi(A)}\, d\mu_\Lambda^\xi(A)$

$\forall x \in \Lambda$, $\forall h \in C(X_\Lambda)$: cette condition caractérise la mesure π_Λ^ξ.

μ est donc une mesure de Gibbs.

Théorème

a) une mesure de Gibbs canonique pour un potentiel V est quasi-invariante sous l'action du groupe $\overline{G}$ et admet comme module de quasi-invariance la fonction induite par $\tau_{xy} \longmapsto e^{V(\eta_{xy}) - V(\eta)}$.

b) et réciproquement.

Démonstration

a) Il suffit de vérifier la propriété caractéristique pour $f \in C(X_\Lambda)$; on suppose x,y dans Λ.

$$\int f(\eta)\, e^{V(\eta_{xy}) - V(\eta)}\, d\mu = \int d\bar{\mu}(\xi) \int f(A)\, e^{V_\xi(A_{xy}) - V_\xi(A)}\, d\mu_\Lambda^\xi(A)$$

$$= \int d\bar{\mu}(\xi)\,.\, \sum_{N=0}^{|\Lambda|} \mu_\Lambda^\xi(|A| = N) \int f(A)\, e^{V_\xi(A_{xy}) - V_\xi(A)}\, d\mu_{\Lambda,N}^\xi(A) \qquad (1)$$

Or $\mu_{\Lambda,N}^\xi = \pi_{\Lambda,N}^\xi$ $\xi-\bar{\mu}$ presque sûrement et $\pi_{\Lambda,N}^\xi$ est la mesure de quasi-invariance par $(\tau_{xy}\ ;\ x,y \in \Lambda)$ de module de quasi-invariance $\tau_{xy} \longrightarrow e^{V_\xi(A_{xy}) - V_\xi(A)}$ avec : $V_\xi(A) = V(A \cup \xi) - V(\xi)$.

Donc : $(1) = \int d\bar{\mu}(\xi)\,.\, \sum_{N=0}^{|\Lambda|} \mu_\Lambda^\xi(|A| = N). \int f(A_{xy})\, d\mu_{\Lambda,N}^\xi(A) = \int f(\eta_{xy})\, d\mu$.

---

b) Soit $f \in C(X_\Lambda)$ $\quad E^\mu(f/G_\Lambda)$ est une fonction de (ξ,N) G_Λ-mesurable.

A cause de la linéarité de l'espérance conditionnelle, il existe un ensemble G_Λ-mesurable Ω de μ-mesure 1 tel que :

$\forall (\xi,N) \in \Omega$ $\quad f \longmapsto E^\mu(f/G_\Lambda)(\xi,N)$ est une probabilité : il suffit de montrer que (ξ,N) μ-presque partout elle est égale à $\pi_{\Lambda,N}^\xi$, c'est à dire quasi-invariante pour $(\tau_{xy}\ ;\ x,y \in \Lambda)$ et de module $e^{V_\xi(A_{xy}) - V_\xi(A)}$.

C'est à dire $\forall f \in C(X_\Lambda)$, les fonctions G -mesurables

$E(f \circ \tau_{xy}/G_\Lambda)$ et $E(f.e^{V_\xi(A_{xy}) - V_\xi(A)}/G_\Lambda)$ sont -presque partout égales.

Pour cela il faut et il suffit que pour toute fonction G_Λ-mesurable g

$$E(g.E^{\mu}(f\circ\tau_{xy}/G_\Lambda)) = E(g.E^{\mu}(f.e^{V_\xi(A_{xy})-V_\xi(A)}/G_\Lambda))$$

Mais $E(g.E^{\mu}(f\circ\tau_{xy}/G_\Lambda)) = E(g.f\circ\tau_{xy})$ car $g\circ\tau_{xy} = g$ et

$E(g.f\,e^{V_\xi(A_{xy})-V_\xi(A)}) = E(g.f\circ\tau_{xy})$: c'est la quasi-invariance. CQFD .

Soit G un groupe dénombrable quelconque et X un espace compact.

Le théorème suivant propose une caractérisatiion des mesures extrémales du convexe compact K des mesures quasi-invariantes pour un module donné continu . On supposera $K \neq \emptyset$.

Théorème

$\mu \in \mathrm{Ext}(K)$ si et seulement si μ est triviale sur la sous-tribu I_G des boréliens de X invariants par G .

Démonstration

$\Rightarrow$ Soit A un ensemble G-invariant avec $0<\mu(A)<1$.

On définit $\mu(B/A) = \dfrac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}$ et $\mu(B/\complement A) = \dfrac{\mu(B\cap\complement A)}{\mu(\complement A)}$

on a $\mu = \mu(A)\,\mu(\,.\,/A) + \mu(\complement A)\,\mu(\,.\,/\complement A)$.

Montrons que $\mu(\,.\,/A) \in K$:

Soit f mesurable bornée sur X , on a : $\int f(\eta)\, a_g(\eta)\, d\mu(\eta) = \int f\circ g(\eta)\, d\mu(\eta)$

$\forall g \in G$. On choisit $f(\eta) = 1_A(\eta)\, h(\eta)$ avec h quelconque .

A est G-invariant donc $1_A(\eta) = 1_A(g\eta)$

$\int h(\eta)\, a_g(\eta)\, 1_A(\eta)\, d\mu(\eta) = \int h\circ g(\eta)\, 1_A(\eta)\, d\mu(\eta)$ D'où $1_A.\mu \in K$

Donc la probabilité $\dfrac{1}{\mu(A)}\, 1_A.\mu \in K$ Donc μ n'est pas extrémale.

$\Leftarrow$ Une fonction $f \in L^1(X,\mu)$ est dite invariante par G si $\forall g \in G$:

$f(x) = f(g.x)$ μ-presuqe partout.

Montrons alors que si μ est triviale sur I_G , les fonctions de $L^1(X,\mu)$ G-invariantes sont les constantes (il suffit de considérer pour une fonction G-invariante une fonction borélienne équivalente).

Puiqque le groupe G est dénombrable :

$\forall g,h \in G$, il existe Ω_{gh} borélien avec $\mu(\Omega_{gh}) = 1$ et $\forall x \in \Omega_{gh}$

$f(gx) = f(hx)$; soit $\Omega = \bigcap \Omega_{gh}$ on a $\mu(\Omega) = 1$ et $\forall x \in \Omega, f(gx) = f(hx)$

$\forall g,h \in G$. On pose alors $\overline{f} = f$ sur Ω et $\overline{f} = 0$ ailleurs. Comme Ω est un borélien invariant, $\overline{f}$ est une fonction strictement invariante

$(\forall g \in G\ ,\ \forall x \in X\ ,\ f(x) = f(gx))$

Si $a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}([a, +\infty[)$ est un borélien invariant donc de mesure 0 ou 1.

On en déduit que f est constante μ-presque sûrement.

Supposons que $\mu = a\mu_1 + b\mu_2$ avec $a + b = 1$; $a,b>0$ et $\mu_1 , \mu_2 \in K$.

On a : $\mu_1 \ll \mu$ et donc il existe $f \in L^1(X,\mu)$ avec $\mu_1 = f.\mu$

Mais $\forall \psi \in \mathcal{C}(X)$: $\int f(x)\psi(x)\, d\mu(x) = \int \psi(x)\, d\mu_1(x)$ d'une part et $\forall g \in G$

$$\int f(gx)\,\psi(x)\, d\mu(x) = \int f(x)\,\psi(g^{-1}x)\, d\mu^g(x) = \int f(x)\,\psi(g^{-1}x)\, a_g(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int \psi(g^{-1}x)\, a_g(x)\, d\mu_1(x) = \int \psi(x)\, d\mu_1(x)\ .$$

Donc $\forall g \in G$ $f(x) = f(gx)$ μ-pp et donc f est G-invaraànte, donc constante. Puisque μ et μ_1 sont deux probabilités cela donne $\mu = \mu_1$.

Donc μ est extrémale dans K .

Ce théorème permet de caractériser les extrémales parmi les mesures de Gibbs et les mesures de Gibbs canoniques.

Remarques

1) Si $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ et G désigne le groupe des translations , on retrouve un résultat classique de théorie ergodique : les mesures G-invaraintes extrémales sont les mesures ergodiques.

2) Le théorème permet également de caractériser les extrémales parmi les mesures de Gibbs (canoniques) invariantes par translations.

3- Les mesures de Gibbs canoniques extrémales sont des mesures de Gibbs

Ce résultat, pour un potentiel à portée finie, se trouve dans Logan (7) ; il est étendu içi aux potentiels continus avec la seule restriction : les fonctions $V(\eta_x) - V(\eta)$ sont uniformément bornées en x . Cette condition est également supposée vérifiée dans Georgii (1) (elle l'est trivialement si le potentiel sur $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ est invariant par translation).

En suivant Logan, nous allons démontrer le théorème :

Théorème

Soit μ une mesure de Gibbs canonique extrémale avec $\mu \neq \delta_0$ et $\mu \neq \delta_1$ il existe $\rho \in]0, \infty[$ tel que :

$$\forall f \in C(X) \quad , \quad \int \eta(x)\, c_x(\eta)\, f(\eta_x)\, d\mu \quad = \int [1 - \eta(x)]\, f(x)\, d\mu \qquad (1)$$

où $c_x(\eta) = e^{V(\eta_x) - V(\eta)}$.

Ce résultat est en effet équivalent au fait que μ est une mesure de Gibbs pour le potentiel $V + \mathrm{Log}\rho . V_0$.

Démonstration de l'équivalence :

$$\eta(x)\,\frac{c_x(\eta)}{\rho} = \eta(x)\, c_x^{\rho}(\eta) \qquad \text{où} \qquad c_x^{\rho}(\eta) = e^{(V + \mathrm{Log}\rho\, V_0)(\eta_x) - (\text{---})(\eta)}$$

d'où : $(1) \Leftrightarrow (2) \qquad \forall f \quad \int \eta(x)\, c_x(\eta)\, f(\eta_x)\, d\mu = \int [1 - \eta(x)]\, f(\eta)\, d\mu$

$(2) \Leftrightarrow (2') \qquad \forall g = f \circ \tau_x \quad \int \eta(x) c_x(\eta) g(\eta) d\mu = \int [1 - \eta(x)] g(\eta_x)\, d\mu$

$(2) \Leftrightarrow (2'') \qquad h = f.c_x^{\rho} \qquad \int \eta(x) h(\eta_x)\, d\mu = \int [1 - \eta(x)] c_x(\eta) h(\eta) d\mu$

Or $\mu \in \mathrm{Gibbs}(V + \mathrm{Log}\rho . V_0) \Leftrightarrow \forall k \in C(X) \qquad \int k(\eta) c_x(\eta) d\mu = \int k(\eta_x) d\mu \qquad (1')$

L'équivalence résulte alors de $(2')$ et $(2'') \Leftrightarrow (1')$ ($k = [1 - \eta(x)] k + \eta(x) k$)

La démonstration du théorème comporte trois étapes :

- la construction de deux mesures ν_1 et ν_2 à partir d'une mesure canonique vérifiant (5) : $\int \eta(x) g(\eta_x) c_x(\eta) d\nu_2 = \int [1 - \eta(x)]\, g(\eta) d\nu_1$
- la démonstration du fait que ν_1 et ν_2 sont des mesures canoniques.
- l'utilisation de l'extrémalité de μ pour montrer que ν_1 et ν_2 lui sont positivement colinéaires ; d'où la conclusion.

Etape 1

- puisque μ est canonique pour le potentiel V : $\forall f \in C(X)$,

$$\int f(\eta)\, e^{V(\eta_{xy}) - V(\eta)}\, d\mu = \int f(\eta_{xy})\, d\mu \qquad (3)$$

Posons $f(\eta) = \eta(x)[1-\eta(y)]\, g(\eta_x)\, e^{V(\eta_x) - V(\eta_{xy})} \qquad x \neq y \quad g \in C(X)$

Appliquant (3) il vient : $\forall x,y \quad x \neq y \qquad g \in C(X)$,

$$\int \eta(x)\,[1-\eta(y)]\, g(\eta_x)\, c_x(\eta)\, d\mu = \int \eta(y)\,[1-\eta(x)]\, g(\eta_y)\, c_y(\eta)\, d\mu \qquad (4)$$

On peut montrer en utilisant une décomposition de f que (4) $\Rightarrow$ (3) :

(4) est donc caractéristique des mesures canoniques.

- Posons $\nu_{1,y} = \eta(y)\, c_y(\eta)\mu$ et $\nu_{2,y} = [1-\eta(y)]\mu$

les $c_x(.)$ étant uniformément bornés, lorsque $y_n \longrightarrow \infty$ il existe une sous-suite, notée encore y_n , telle que : $\nu_{1,y_n} \longrightarrow \nu_1$ et $\nu_{2,y_n} \longrightarrow \nu_2$.

- Si la fonction continue g ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées à partir d'un certain rang : $g(\eta_y) = g(\eta)$.

Passant à la limite dans (4) il vient :

$$\int \eta(x)\, g(\eta_x)\, c_x(\eta)\, d\nu_2 = \int [1-\eta(x)]\, g(\eta)\, d\nu_1 \qquad (5)$$

relation qui est alors vraie pour toute fonction continue.

Etape 2

- Appliquons (4) à la fonction $g(\eta) = f(\eta)\,\eta(y_n)\, c_{y_n}(\eta)$ avec $x \neq y \neq y_n \neq x$

$$\int \eta(x)\,[1-\eta(y)]\, f(\eta_x)\, \eta_x(y_n)\, c_{y_n}(\eta_x)\, c_x(\eta)\, d\mu =$$

$$\int \eta(y)\,[1-\eta(x)]\, f(\eta_y)\, \eta_y(y_n)\, c_{y_n}(\eta_y)\, c_y(\eta)\, d\mu \quad .$$

- Nous passons à la limite en y_n en remplaçant $c_{y_n}(\eta_x)$ par $c_{y_n}(\eta)$ et $c_{y_n}(\eta_y)$ par $c_{y_n}(\eta)$. Il suffit pour cela de vérifier la convergence uniforme vers zéro de :

$$1 - \frac{c_y(\eta_x)}{c_y(\eta)} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{c_{y_n}(\eta_y)}{c_{y_n}(\eta)} \quad \text{lorsque } y_n \text{ tend vers l'infini .}$$

- Cette convergence a lieu car : $\quad 1 - \dfrac{c_{y_n}(\eta_y)}{c_{y_n}(\eta)} = 1 - e^{\pm J_V(x,y_n)}$

et $J_V(x,y_n) = V(\eta_x) - V(\eta) - V(x)$ pour $\eta = \{y_n\} \to \emptyset$ d'où $J_V(x,y_n) \to 0$.

- A la limite, on obtient que ν_1 est une mesure de Gibbs canonique.

  D'une façon analogue (plus simple) on montre que ν_2 est aussi une mesure de Gibbs canonique. (dans chacun des deux cas c'est la relation (4) que l'on vérifie) .

Etape 3

- Montrons que $\nu_1 = c_1 \mu$ avec $c_1 = \nu_1(X)$.
  - si $c_1 = 0$, c'est vrai .
  - sinon il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda . \eta(x)\ c_x(\eta) < \frac{1}{2}\quad \forall\ \eta, x$

    et $\gamma_1 = \mu - \lambda . \nu_1$ est une mesure positive de masse $\geqslant \frac{1}{2}$; par limite faible ,elle est de plus Gibbs canonique.

    Par extrémalité , μ est proportionnelle à ν_1 .
- De même pour ν_2 .
- Si $\mu \neq \delta_0$ et $\mu \neq \delta_1$ c_1 et c_2 sont non nulles :

  si $c_2 = 0$ d'après (5) , ν_1 , donc μ , est concentrée sur $\eta(x) = 0$ pour tout x et $\mu = \delta_0$

  de même si $c_1 = 0$, puisque $c_x(\eta)$ est minoré : $\mu = \delta_1$.
- D'où le théorème avec $\rho = c_1/c_2$.

Remarque

1- Georgii, dans (1), obtient le même résultat, en utilisant les fonctions thermodynamiques (activité : $z(\eta) = \liminf\limits_{V \to S} \liminf\limits_{W \to S} \liminf\limits_{\Lambda \to S} (\S)$

$$\S = \frac{Z_{\Lambda-W,N(\eta_{\Lambda-W})}(0_V\eta_{S-V})}{Z_{\Lambda-W,N(\eta_{\Lambda-W})+1}(0_V\eta_{S-V})} \qquad \text{avec} \quad V \subset W \subset \Lambda \subset S \quad \text{et } Z_{\Lambda,N}(\eta)$$

désigne la masse totale de la mesure $m^{\eta}_{\Lambda,N}$ de la définition 4 .

2- Avec la caractérisation des mesures extrémales du paragraphe précédent, et l'inclusion des tribus $I_G \subset I_{\overline{G}}$, une mesure canonique extrémale, puisqu'elle est de Gibbs est donc de Gibbs extrémale.

4- Processus d'évolution

- Pour un processus de naissance et mort sur X dont les vitesses sont données par $c_x(\eta) = e^{V(\eta_x) - V(\eta)}$, Logan (7) a montré que les probabilités stationnaires réversibles sont les mesures de Gibbs , si V est à portée fini.

Ledrappier (5) et Shiga (10) ont étendu ce résultat à V régulier.

- Pour un processus d'exclusion avec changement de vitesses définie sur les fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées par :

$$\Omega f(\eta) = \sum_{x,y} \eta(x)\left[1 - \eta(y)\right] p(x,y)\ c_x(\eta)\left[f(\eta_{xy}) - f(\eta)\right]$$

Logan a également montré, pour un potentiel à portée fini, que les mesures stationnaires réversibles sont les mesures de Gibbs canoniques.

- Nous nous proposons d'étendre ce résultat au cas où V est un potentiel continu. Il faut tout de même conserver des conditions suffisantes d'existence du semi-groupe. Prenons celles-ci dues à Liggett (6) :

1) $p(x,y) = p(y,x)$

2) $c_x(\eta) \leqslant M \quad \forall\, x, \eta$

3) $\sup\limits_{x} \sum\limits_{u} \sup\limits_{\eta} \left|c_x(\eta_u) - c_x(\eta)\right| < +\infty$

- La condition 3) est une restriction mais elle est vérifiée pour une classe importante de potentiels : pour une interaction de paires attractive, 3) est conséquence de 2) .

<u>Problème</u> : Une condition suffisante du type 3) est-elle vérifiée pour la claase plus large des potentiels supermodulaires ?

- <u>Notation</u> : on peut écrire le générateur infinitésimal :

$$\Omega f(\eta) = \sum_{\{x,y\}} c_{xy}(\eta)\left[f(\eta_{xy}) - f(\eta)\right] \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{où } c_{xy}(\eta) &= p(x,y)\ c_x(\eta) \text{ si } \eta(x) = 1 \quad \eta(y) = 0 \\ &= p(y,x)\ c_y(\eta) \text{ si } \eta(x) = 0 \quad \eta(y) = 1 \\ &= 1 \quad \text{sinon} . \end{aligned}$$

- Avec l'hypothèse $p(x,y) = p(y,x)$, la somme ne porte que sur les ensembles $\{x,y\}$ tels que $p(x,y) \neq 0$.

On remarque que l'hypothèse classique p irréductible est équivalente à dire que les transformations τ_{xy} correspondantes engendrent $\overline{G}$ (cf. Appendice B)

- D'autre part $\dfrac{c_{xy}(\eta)}{c_{xy}(\eta_{xy})} = e^{V(\eta_{xy}) - V(\eta)}$ module de quasi-invariance

qui est donc connu, puisque connu pour unsystème de générateurs de $\overline{G}$.

- Enonçons donc le théorème :

Théorème

Soit V un potentiel continu, tel que $\|V(\eta_x) - V(\eta)\|$ soit bornée en x.

Soit p(x,y) une matrice stochastique irréductible symétrique.

Supposons d'autre part que l'opérateur Ω défini sur les fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées par la série (normalement convergente)

$\Omega f(\eta) = \sum_{\{x,y\}} c_{xy}(\eta)\left[f(\eta_{xy}) - f(\eta)\right]$ s'étende dans le générateur d'un semi-groupe.

Alors les mesures stationnaires pour le processus sont les mesures de Gibbs canoniques pour le potentiel V.

Remarques sur les hypothèses

- on a les conditions suffisantes de Liggett.
- la borne uniforme est une condition d'un autre type (elle a déjà servi)
- la convergence normale de la série en résulte et sera plusieurs fois utilisée.

Démonstration

- On rappelle qu'une mesure réversible est une mesure telle que:

$\forall\ f\ ,\ g \in C(X) \qquad \int f.T_t g\, d\mu = \int g.T_t f\, d\mu$ ce qui est équivalent à :

$\forall\ f\ ,\ g \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \int f.\Omega g\, d\mu = \int g.\Omega f\, d\mu$ (Logan th. 3.1) (1)

C'est en particulier une mesure stationnaire pour le processus.

- Gibbs canonique $\Rightarrow$ réversible :

- $\int f(\eta)c_{xy}(\eta)g(\eta_{xy})\, d\mu = \int g(\eta)c_{xy}(\eta)f(\eta_{xy})\, d\mu \qquad \forall\ f\ ,\ g \in C(X)$ (2)

car les deux membres sont égaux à : $\int f(\eta)g(\eta_{xy})c_{xy}(\eta_{xy})\dfrac{c_{xy}(\eta)}{c_{xy}(\eta_{xy})}\, d\mu$

- Si f et g ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées $f.\Omega g - g.\Omega f$ est somme d'une série normalement convergente et on obtient :

$\int f.\Omega g\, d\mu = \int g.\Omega f\, d\mu$

- Par définition de Ω (densité , dans le graphe de Ω, des couples $(f,\Omega f)$ pour les f ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées !), cette relation s'étend aux couples (f,g) des fonctions du domaine $\mathcal{D}(\Omega)$.

- Réciproquement

Soit (x,y) un couple tel que $p(x,y) \neq 0$.

Soient $f = 1_{[\Lambda_o,\Lambda]}$ $x,y \in \Lambda$ $g = 1_{[\Lambda_{oxy},\Lambda]} = 1_{[\Lambda_o,\Lambda]} \circ \tau_{xy}$

$\Omega f = \sum_{\{z,t\}} c_{zt}(\eta)\left[f(\eta_{zt}) - f(\eta)\right]$ et la série est normalement convergente.

$$f.\Omega g - g.\Omega f = \sum_{\{z,t\}} c_{zt}(\eta)\left[f(\eta)g(\eta_{zt}) - f(\eta_{zt})g(\eta)\right]$$

Il suffit alors de remarquer que tous les crochets sont nuls sauf peut-être quand $\{z,t\} = \{x,y\}$.

En effet, envisageons les divers cas :

- si $x,y \in \Lambda_o$ ou $x,y \in \Lambda - \Lambda_o$ alors $f = g$ et tous les crochets sont nuls .
- on peut supposer $x \in \Lambda_o$ et $y \in \Lambda - \Lambda_o$.
  . si $z,t \in S-\Lambda$ f,g sont invariantes par τ_{zt} et le crochet est nul.
  . si $z,t \in \Lambda$ $f(\eta)g(\eta_{zt}) - f(\eta_{zt})g(\eta) = 1_{[\Lambda o,\Lambda]} 1_{[\Lambda o,\Lambda]xy,zt}(\eta) - 1_{[\Lambda o,\Lambda]zt}\, 1_{[\Lambda o,\Lambda]xy}(\eta)$ et le résultat est nul sauf si les cylindres coïncident c'est à dire $\{x,y\} = \{z,t\}$ et le crochet est égal à $(f-g)(\eta)$.
  . si $z \notin S-\Lambda$, $t \in \Lambda$, un examen de tous les cas montre que tous les crochets sont nuls.

D'où pour toute fonction caractéristique de cylindres:

$$\int c_{xy}(\eta)\left[f(\eta) - f(\eta_{xy})\right]d\mu = 0$$

Par linéarité et densité cette relation est vraie pour toute fonction de $C(X)$.

On en déduit que μ est quasi-invaraînte pour le module $\dfrac{c_{xy}(\eta)}{c_{xy}(\eta_{xy})}$;

c'est donc une mesure de Gibbs canonique.

5- Caractérisation des mesures réversibles extrémales du processus d'évolution

- Soit μ une mesure réversible pour le semi-groupe de transformations $\{T_t\ ,\ t \geqslant 0\}$ de générateur Ω tel que : $\forall f \in \mathcal{D}(\Omega)\ \int f.\Omega f\ d\mu \leqslant 0$.

  Un théorème de Holley et Stroock (4) assure qu'alors il existe un unique semi-groupe de contraction de $L^2(X,\mu)$ fortement continu , auto-adjoint prolongeant le semi-groupe défini sur $C(X)$. Son générateur Ω_μ est le prolongement auto-adjoint de Ω à $L^2(X,\mu)$. Son domaine est noté $\mathcal{D}(\Omega_\mu)$.

- Nous utiliserons ce théorème pour démontrer le suivant :

Théorème

μ réversible extrémale $\Leftrightarrow$ Toute fonction T_t-invariante de $L^2(X,\mu)$ est une constante.

La démonstration de cethéorème résulte d'une suite de lemmes.

- Vérifions d'abord $(\Omega f,f) \leqslant 0$ pour $f \in \mathcal{D}(\Omega)$: il suffit de le vérifier pour f dans $F(X)$.

$$\int f.\Omega f\ d\mu = \sum_{\{x,y\}} \int c_{xy}(\eta)\ f(\eta)\left[f(\eta_{xy}) - f(\eta)\right]d\mu$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\{x,y\}} \int c_{xy}(\eta)\left\{ f(\eta)\left[f(\eta_{xy}) - f(\eta)\right] + f(\eta_{xy})\left[f(\eta) - f(\eta_{xy})\right]\right\}d\mu$$

car μ est de Gibbs canonique

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\{x,y\}} \int c_{xy}(\eta)\ \left[f(\eta_{xy}) - f(\eta)\right]^2 d\mu \leqslant 0 \qquad (1)$$

- Lemme

  f T_t-invariante $\Longleftrightarrow$ f $\overline{G}$-invariante .

  d'après la relation précédente : $\int f.\Omega f\ d\mu \leqslant -\frac{1}{2}\ c_{xy}\left[f(\eta_{xy}) - f(\eta)\right]^2 d\mu \leqslant 0$

$\forall$ x,y et pour tout élément f de $\mathcal{D}(\Omega_\mu)$ par extension de (1)

si f est T_t-invariante elle est dans le domaine de Ω_μ et $\Omega_\mu f = 0$

d'où : $\forall$ x,y $\quad p(x,y) \neq 0 \qquad \int c_{xy}(\eta)\ \left[f(\eta) - f(\eta_{xy})\right]^2 d\mu = 0$

et $f(\eta) = f(\eta_{xy})$ $\quad\mu$-presque partout .

les transformations τ_{xy} , $p(x,y) \neq 0$ engendrant le groupe $\overline{G}$, f est $\overline{G}$ invariante .

• Réciproque : démontrons d'abord le résultat suivant :

- lemme

Soit $f \in L^2(X,\mu)$, f $\overline{G}$-invariante alors $\forall g \in F(X)$, $(f, \Omega g) = 0$

En effet : $(f, \Omega g) = \sum_{\{x,y\}} \int c_{xy}(\eta)\, f(\eta) \left[g(\eta_{xy}) - g(\eta)\right] d\mu$;

la fonction h : $h(\eta) = f(\eta) g(\eta_{xy})$ est dans $L^1(X,\mu)$ où μ est une mesure de Gibbs canonique , donc $\int c_{xy}(\eta) \left[h(\eta_{xy}) - h(\eta)\right] d\mu = 0$.

Puisque f est $\overline{G}$ invariante, tous les termes de la série sont nuls, d'où le résultat.

Ceci permet de montrer alors que : $\frac{d}{dt}(f, T_t g) = 0$.

Donc : $(f, T_t g) = (T_t f, g) = (f, g)$ et : $f = T_t f$.

• Remarque

Shiga utilise une méthode complètement L^2 faisant intervenir la racine carré de l'opérateur positif $-\Omega_\mu$!

• Corollaire

μ est extrémale si et esulement si toute fonction T_t invariante est constante dans $L^2(X,\mu)$.

Lemme

Soit μ une mesure de Gibbs.

Si f est $T_t$invariante alors f est G-invariante.

Démonstration

Ceci a un sens puisque μ est une mesure de Gibbs canonique ;

puisque f est T_t invariante, d'après le lemme précédent, f est $\overline{G}$ invariante,

d'où : $$\left|\eta(x)[1 - \eta(y)][f(\eta_x) - f(\eta)]\right|_{L^2} = \left|\eta(x)[1 - \eta(y)][f(\eta_{xy}) - f(\eta_x)]\right|_{L^2}$$

$\left|f \circ \tau_x \circ \tau_y - f \circ \tau_x\right|_{L^2} \longrightarrow 0$ car c'est en particulier vrai pour les fonctions de F(X) et on peut passer à la limite car les transformations (τ_x)

forment une famille équicontinue dans $L^2(X,\mu)$ (de norme inférieure à $\sqrt{M}$ si $c_x(\eta) < M$)

D'où : $$\lim_{y \to \infty} \left| \eta(x)[1-\eta(y)][f(\eta_x) - f(\eta)] \right|_{L^2} = 0 \quad (1)$$

De même on peut montrer que : $$\lim_{y \to \infty} \left| [1-\eta(x)]\eta(y) \; [f(\eta_x) - f(\eta)] \right|_{L^2} = 0 \quad (2)$$

Pour une mesure de Gibbs telle que : $\frac{1}{M} < c_x(\eta) < M$ on peut majorer la mesure de tous cylindre $[\Lambda_o, \Lambda]$ par $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{M}\right)^{|\Lambda|}}$: en particulier si J est une partie infinie de S :
$$\sum_{y \in J} \eta(y) = \sum_{y \in J} [1-\eta(y)] = +\infty \quad \mu\text{-pp}$$

D'après (1) il existe un ensemble A de μ-mesure 1 et une sous-suite y_n tendant vers ∞ tels que : $$\eta(x)[1-\eta(y_n)][f(\eta_x) - f(\eta)] \to 0 \quad (3)$$

$\forall \eta \in A$; il existe alors un ensemble B de μ-mesure 1 avec (3) et

$\sum_{y_n} [1-\eta(y_n)] = +\infty$. Pour $\eta \in B$, la suite de (3) prend donc une infinité de fois la valeur $\eta(x)[f(\eta_x) - f(\eta)]$ qui est donc nulle.

De même : $[1-\eta(x)][f(\eta_x) - f(\eta)]$ est presque partout nulle et

$f(\eta_x) - f(\eta) = 0$ μ-presque partout.

Corollaire (réciproque du théorème du § 3)

Les mesures de Gibbs extrémales sont canoniques extrémales.

Si μ est de Gibbs extrémale , toute fonction G-invariante est constante (théorème du § 2) Donc d'après le lemme toute fonction T_t-invariante est constante. Donc d'après le corollaire de la page 17, μ est une mesure de Gibbs canonique extrémale.

Ceci achève de démontrer le théorème principal.

Appendice A **Théorème d'existence des mesures de Gibbs**

On sait que les mesures de Gibbs sont les mesures quasi-invariantes pour le module $a_\Lambda(\eta) = e^{V(\eta_\Lambda) - V(\eta)}$ où $\Lambda \in F(S)$ et $\eta_\Lambda(x) = \eta(x)$ si $x \notin \Lambda$ et $1 - \eta(x)$ si $x \in \Lambda$.

Cette présentation nous permet de donner une démonstration de leur existence.

Le groupe G peut être identifié à F(S) , $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel .

μ vérifie donc $\forall f \in C(X)$ $\quad \int f(\eta)\, a_\Lambda(\eta)\, d\mu = \int f(\eta_\Lambda)\, d\mu$

c'est à dire $\forall g \in C(X)$ $\quad \int g(\eta)\, d\mu = \int g(\eta_\Lambda)\, a_\Lambda(\eta)\, d\mu$

μ est donc une mesure invariante pour la transformation T_Λ non ponctuelle :

$$T_\Lambda(g) = (g \circ \tau_\Lambda) . a_\Lambda(.)$$

Proposition 1

L'ensemble des transformations T_Λ , $\Lambda \in F(S)$ forme un groupe isomorphe à G.

Démonstration

$T_{\Lambda_1 \circ \Lambda_2} = T_{\Lambda_1 \Delta \Lambda_2}$ en effet :

$$T_{\Lambda_1}(T_{\Lambda_2}(g)) = (T_{\Lambda_2}(g) \circ \tau_{\Lambda_1}).a_{\Lambda_2} = ((g \circ \tau_{\Lambda_2} . a_{\Lambda_2}) \circ \tau_{\Lambda_1}).a_{\Lambda_2}$$

$$= (g \circ \tau_{\Lambda_2} \circ \tau_{\Lambda_1})(a_{\Lambda_2} \circ \tau_{\Lambda_1})(a_{\Lambda_1})$$

Or $\quad (a_{\Lambda_2} \circ \tau_{\Lambda_1}) a_{\Lambda_1} = a_{\tau_{\Lambda_1} \circ \tau_{\Lambda_2}} = a_{\Lambda_1 \Delta \Lambda_2}$

On a donc ramené le problème des mesures quasi-invariantes à celui des mesures invariantes sous l'action d'un groupe abélien (donc moyennable) de transformations.

L'existence de mesure de Gibbs résulte alors d'un théorème de point fixe si on trouve un convexe compact de mesures sur X, sur lequel le groupe agit continument.

Proposition 2

Il est nécessaire et suffisant de montrer que l'ensemble des mesures de probabilité sur X telles que $\mu(a_\Lambda) = 1 \quad \forall \Lambda$ est non vide.

- c'est nécessaire car les mesures de Gibbs ont cette propriété.
- c'est suffisant car le groupe des T_Λ agit par dualité sur ce convexe compact.

Théorème 3

Il y a au moins une mesure de probabilité μ telle que $\mu(a_\Lambda) = 1 \quad \forall \Lambda$.

En effet μ probabilité $\Leftrightarrow \quad \forall f \in C(X) \quad \mu(f) \leqslant p(f)$

avec $p(f) = \sup f(x)$

p est une fonctionnelle sous-additive positivement homogène. Par le théorème de Hahn-Banach l'existence de μ résulte de ce que sur le sous-espace E engendré par les a_Λ on trouve une (et une seule !) forme linéaire $\mu/E \leqslant p$.

Il suffit pour cela de montrer : $\sum \alpha_i \leqslant p(\sum \alpha_i a_{\Lambda_i})$

$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ ce qui résulte de l'existence des mesures de Gibbs sur l'ensemble fini $\Lambda = \cup \Lambda_i$ avec une condition extérieure.

Appendice B

Proposition

Si $p(x,y)$ est symétrique et irréductible, l'ensemble des transformations τ_{xy} avec $p(x,y) \neq 0$ engendre le groupe $\overline{G}$.

Soit $x,y \in S$, puisque p est irréductible , il existe une suite $x_o = x$, $x_1, \dots$, $x_n = y$ avec $\forall i \quad p(x_i, x_{i+1}) \neq 0$

Or $\tau_{xy} = \tau_{x_o x_1} \circ \tau_{x_1 x_2} \circ \dots \circ \tau_{x_{n-1} x_n} \circ \tau_{x_{n-2} x_{n-1}} \circ \dots \circ \tau_{x_o x_1}$.

ce qu'on obtient en décomposant de deux manières différentes la permutation circulaire $(x_o, \dots, x_n) \to (x_n, x_o, \dots, x_{n-1})$. Le résultat suit puisque les τ_{xy} engendrent $\overline{G}$.

Appendice C

On peut démontrer le théorème $\text{Ext Can } V = \bigcup_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} \text{Ext } G(V + \lambda V_o)$ dans toute sa généralité (c'est à dire avec la seule hypothèse $|V(\eta_x) - V(\eta)| \leq M$ en se servant du semi-groupe $U_t = \exp tH$

$$Hf = \sum \lambda_{xy} \, c_{xy}(\eta) \, [f(\eta_{xy}) - f(\eta)]$$

où la série des λ_{xy} est convergente ; H est continu mais le processus ainsi construit n'est pas du type précédent.

Bibliographie

(1) Georgii H.O. Canonical Gibbs states, their relation to Gibbs states and applications to two-valued Markov chains (preprint)

(2) Georgii H.O. On canonical Gibbs states ans symmetric and tail events (preprint)

(3) Higuchi Y. and Shiga T. Some results on Markov processes on infinite lattice spin systems Jour. of Math. of Kyoto Univ. V.15 N°1 1975.

(4) Holley R. and Stroock D. L^2-theory for the stochastic Ising model (preprint)

(5) Ledrappier F. Mesures de Gibbs et évolutions (Séminaire sur les systèmes infinis de particules . Ecole Polytechnique)

(6) Liggett T. Existence theorem for infinite particle systems. Trans. A.M.S. Vol.165 (1972) pp.471-481 .

(7) Logan K. Time reversible evolutions in statistical mechanics (thesis)

(8) Preston C. Gibbs states on countable sets Cambridge University Press (1974)

(9) Ruelle D. Statistical mechanics Benjamin. New-York (1969)

(10) Shiga T. Some problems related to Gibbs states, canonical Gibbs states et markovian time evolutions (preprint)

(11) Sullivan W. Mean square relaxation times for evolutions of random fields Comm. Math. Phys. 40 , 249-258 (1975) .