Complétion contrainte avec simplification

Jean-Pierre Jouannaud[1]*

LIX, École Polytechnique
91400 Palaiseau, France
email: jouannaud@lix.polytechnique.fr http:
//www.lix.polytechnique.fr/Labo/jean-pierre.jouannaud

1 Complétion contrainte avec simplification

La règle de simplification est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} l = r \parallel \phi \\ g = d \parallel \psi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} l[d\sigma]_p = r \parallel \phi \\ g\psi \to d\psi \end{array} \right\}$$

$$\text{si } \begin{cases} l \xrightarrow[g=d \parallel \psi]{p} l[d\sigma] \\ r \succ d\sigma \text{ si } l = g\sigma \end{cases}$$

Il nous faut tout d'abord redéfinir R_{E^∞}. La définition restera la même, l'important étant de prendre des instances d'équations de E^∞. Les instances d'équations de $(E^* \setminus E^\infty)$ seront donc traitées différemment (tout au moins dans le cas de substitutions réructibles). Les règles du cours peuvent donc tout d'abord être reproduites telles quelles, sachant qu'elles s'appliquent à des équations de E^∞ (et non de E^*) :

* Project LogiCal, Pôle Commun de Recherche en Informatique du plateau de Saclay, CNRS, École Polytechnique, INRIA, Université Paris-Sud.

$$s \underset{R_{E^\infty}}{\overset{p}{\longleftarrow}} u \underset{R_{E^\infty}}{\overset{q}{\longrightarrow}} t \Rightarrow s \underset{R_{E^\infty}}{\overset{*}{\longrightarrow}} v \underset{R_{E^\infty}}{\overset{*}{\longleftarrow}} t$$

$$s[l\gamma]_q \underset{l=r \ \| \ \phi\in E^\infty \setminus R_{E^\infty}}{\overset{q}{\longleftrightarrow}} s[r\gamma]_q \Rightarrow$$
$$s[l\gamma[g\gamma]_p]_q \underset{g=d \ \| \ \psi}{\overset{q\cdot p}{\longrightarrow}} s[l\gamma[d\gamma]_p]_q \underset{l[d]_p=r \ \| \ \phi\wedge\psi\wedge l|_p \doteq g}{\overset{q}{\longleftrightarrow}} s[r\gamma]_q$$

$$\text{si } l\gamma[g\gamma]_p \underset{g\gamma\to d\gamma\in R_{E^\infty}}{\overset{p}{\longrightarrow}} l\gamma[d\gamma]_p \text{ et } \gamma = \gamma{\downarrow}$$

$$s[(l[d]_p)\gamma] \underset{l[d]_p=r \ \| \ \phi\wedge\psi\wedge l|_p \doteq g\in(E_{i+1}\cap E^\infty)\setminus E_i}{\longleftrightarrow} s[r\gamma] \Rightarrow$$

$$s[(l[d]_p)\gamma] \underset{E_i}{\longleftrightarrow} s[(l[g]_p)\gamma] = s[l\gamma] \underset{E_i}{\longleftrightarrow} s[r\gamma]$$
$$\text{si } \gamma \neq \gamma{\downarrow}$$

$$s[l\gamma] \underset{l=r \ \| \ \phi\in E_0\cap E^\infty}{\longleftrightarrow} s[r\gamma] \Rightarrow$$
$$s[l\gamma] \underset{R_{E^\infty}}{\overset{+}{\longrightarrow}} s[l\gamma{\downarrow}] \underset{l=r \ \| \ \phi\in E_0}{\longleftrightarrow} s[r\gamma{\downarrow}] \underset{R_{E^\infty}}{\overset{+}{\longleftarrow}} s[r\gamma]$$
$$\text{si } \gamma \neq \gamma{\downarrow}$$

Il nous reste à ajouter les règles de preuve associées aux traitement des équations de $E^* \setminus E^\infty$. Interviennent ici la règle associée à l'élimination des équations tautologiques, celle associée au nettoyage des contraintes, ainsi que celles associées aux simplifications. Lors d'une simplification, une règle est simplifiée et la règle simplifiante est instanciée. Cela va donner lieu à deux réductions de preuves différentes. Nous considèrerons qu'une simplification engendre deux systèmes de règles successifs, le premier avec la règle simplificatrice instanciée, le second avec la règle simplifiée. Cette dernière aura donc un numéro plus grand que la règle simplificatrice instanciée, ce qui sera utilisé dans l'ordre sur les preuves.

Nous devrons distinguer à nouveau le cas d'une subtitution en forme normale du cas d'une qui ne l'est pas. Dans le second cas, on va derechef remonter le temps vers E_0. Dans le premier, on va progresser vers des règles de E^∞ de façon à pouvoir appliquer une paire critique (dont l'équité assure l'existence). Il est important de noter que lorsque la substitution γ est en forme normale dans le membre gauche de règle, elle l'est encore dans le membre droit (ce n'est pas nécessairement la même substitution, même si elle porte le même nom). Cela permettra effectivement de construire l'ordre assurant la terminaison des règles de preuves.

$$s \underset{E^*}{\longleftrightarrow} s \Rightarrow nil$$

$$s \underset{l=r \ \| \ \phi}{\longleftrightarrow} t \Rightarrow s \underset{l=r \ \| \ \phi \wedge x \doteq t}{\longleftrightarrow} t$$
$$\text{si } \gamma \neq \gamma$$

$$s \underset{l=r \ \| \ \phi \wedge x \doteq t}{\longleftrightarrow} t \Rightarrow s \underset{l=r \ \| \ \phi}{\longleftrightarrow} t$$
$$\text{si } \gamma = \gamma\!\downarrow$$

$$s[g\gamma] \underset{g\psi=d\psi}{\longleftrightarrow} s[d\gamma] \Rightarrow s[g\gamma] \underset{g=d \ \| \ \psi}{\longleftrightarrow} s[d\gamma]$$
$$\text{si } \gamma \neq \gamma\!\downarrow$$

$$s[g\gamma] \underset{g=d \ \| \ \psi}{\longleftrightarrow} s[d\gamma] \Rightarrow s[g\gamma] \underset{g\psi=d\psi}{\longleftrightarrow} s[d\gamma]$$

$$\text{si } \gamma = \gamma\!\downarrow$$

$$s[(l[d\sigma]_p)\gamma] \underset{l[d\sigma]_p=r \ \| \ \phi}{\longleftrightarrow} s[r\gamma] \Rightarrow s[l\gamma] \underset{l=r \ \| \ \phi}{\longleftrightarrow} s[r\gamma]$$
$$\text{si } \gamma \neq \gamma\!\downarrow$$

$$s[l\gamma] \underset{l=r \ \| \ \phi}{\longleftrightarrow} s[r\gamma] \Rightarrow s[(l\gamma[g\gamma]_p)] \underset{g\psi \to d\psi}{\longleftrightarrow} s[(l\gamma[d\gamma]_p)] \underset{l[d\sigma]_p=r \ \| \ \phi}{\longleftrightarrow} s[r\gamma]$$
$$\text{si } \gamma = \gamma\!\downarrow$$

L'ordre sur les preuves est une adaptation de celui donné en cours.

On peut se demander quelle est l'utilité d'instancier les règles simplificatrices. On connait la réponse : sans cela, on perd la complétude. Cela vient du fait que le système de règles R_E^∞ que nous avons défini est alors incomplet. De manière plus précise, il existe des instances closes d'équations de E^* qui ne sont pas démontrables par R_E^∞. Cela signifie que l'équité ne peut être assurée sans cette règle d'instanciation des règles simplificatrices. Du point de vue des règles de preuve, cela revient à dire que la complétude des règles de preuve (c-a-d le fait que toute preuve est en forme normale ou réductible), qui utilise l'équité en présence de simplification, nécessite cette règle d'instanciation.

Remarquons que nous n'avons pas utilisé le fait que lors de la simplification, la règle simplificatrice est complètement instanciée (elle a été traitée comme les autres lorsque la substitution n'était pas en forme normale). Cette remarque permet donc de ne pas instancier complètement la règle simplificatrice si cela n'est pas nécessaire à la complétude (et cela ne l'est pas). On peut donc donner une version plus libérale de la simplification, qui tienne en particulier lieu des variables non linéaires de la règle. Cette version est laissée à l'imagination du lecteur.

2 Simplification des contraintes

En plus des règles de simplification qui ne changent pas l'ensemble des solutions d'une contrainte, on peut ajouter des règles qui changent les solutions sans pour autant détruire les preuves associées : il suffit pour cela de réduire les contraintes avec les équations contraintes existantes. Il est facile d'ajouter les règles correspondantes et de modifier en conséquence l'ordre sur les preuves.